Logarithme et moyenne géométrique

1 Enoncé

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$.
2. Soient $0 < x < y$. On pose, pour $t \in [0,1]$, $f(t) := \ln(tx + (1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y)$.
   (a) Montrer que $f'' < 0$ sur $[0,1]$.
   (b) Déterminer les signes de $f'(0)$ et de $f'(1)$.
   (c) En déduire que $\ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y)$, et que l'on a l'égalité que si $t = 0$ ou 1.
   (d) En déduire que $\exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y)$, et que l'on a l'égalité que si $t = 0$ ou 1.
3. Montrer par récurence sur n l'inégalité

$$\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

   où $x_1, \cdots, x_n$ sont des nombres strictements positifs.

   Quand a-t-on égalité?
4. Démontrer l'inégalité suivante et discuter des cas possibles d'égalité

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad x_1 \geq 0, \cdots x_n \geq 0, \cdots$$

5. En écrivant $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

2 Travail demandé au candidat

1. Quelle est la théorie mathématique qui sous-tend cet exercice?
   Comment montreriez-vous simplement ces résultats avec des outils post-bac?
2. Déceler les pièges que renferme cet énoncé pour les élèves.
3. Clarifiez l'énoncé en modifiant des questions.
4. Donner les interprétations géométriques aux résultats de cet énoncé.
5. Proposer une démonstration du niveau de la première S pour démontrer la croissance de (u_n) (inégalité de Brenoulli)
6. Proposer d'autres exemples de situation dépendant du même thème.

source: Dossier de la préparation d'0rsay, 2004.