Asymptotes

sources: d'aprés des documents de la préparation au Capes d'Orsay.

1 Enoncé I

1. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer a,b,c,d pour que $f(x) = ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+2x+2}$.
3. Comment calculer $f(233429)$ à 10^{-5} près très facilement avec 2 oprérations seulement?
4. L'approximation obtenue est-elle par excès ou par défaut?

2 Travail demandé au candidat

1. En classe de TS, quelles méthodes recommanderiez-vous aux élèves pour résoudre la question 2.
2. Proposez une légère modification de l'énoncé pour que la réponse analogue à la question 4. pour approcher $f(-233429)$ soit différente.
3. Comment, en modifiant un peu l'énoncé, faire en sorte pour que le graphe de f possède une ou deux asymptotes verticales.
4. Proposez d'autres types d'énoncés pour faire travailler les élèves sur ce thème.

3 Enoncé II

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $G[f]$ son graphe, $a,b \in \mathbb{R}$ et D une droite non verticale d'équation $y = ax+b$. On note $M[x]$ le point de coordonnées $(x, f(x))$.

1. On rappelle que $G[f]$ est asymptote à D en $+\infty$
   ou que que D est une asymptote de $G[f]$ en $+\infty$
   si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-[ax+b]) = 0$.
   Traduire cette définition si $a = 0$.
2. On note $d(M[x],D)$ la distance de $M[x]$ à D.
   Calculer $d(M[x],D)$ en fonction de x,a et b.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} d(M[x],D) = 0$ si et seulement si D est asymptote à $G[f]$ en $+\infty$.

4 Travail demandé au candidat

1. Après avoir défini la notion d'asymptote verticale à $G[f]$ quand $x \to x_0$, examiner si la caractérisation de la question 3. des asymptotes non verticales reste vraie pour une asymptote verticale.
2. Peut-on, dans la question 2., intervertir le rôle de $G[f]$ et de D, i.e. utiliser la distance du point de la droite d'abcisse x à $G[f]$, Regarder le cas de la fonction $x \mapsto x+\sin(x^2)$.

3. Définir une courbe asymptote à $G[f]$,
   et examiner si les questions 2.et 3. sont enocore valables pour une courbe asymptote.

   .