Cable d'ascenseur minier

1 Enoncé

La cage d'ascenseur d'une mine est suspendue à un cable très long, et son poids est important. Sa section est donc variable: plus grande en haut qu'en bas, près de la cage. Le problème est de déterminer cette section tout le long du cable. On suppose que celui-ci est de révolution autour de son axe vertical, et que la surface de sa section est proportionnelle, avec un coefficient noté k, au poids qui est en-dessous de cette section. On désigne par L la longueur du cable, par P le poids de la cage d'ascenseur pleine, par μ la masse volumique du cable supposé homogène.

1. Désignant par x la distance verticale entre un point du cable et le sommet de la cage, on note $S(x)$ la surface de la section du cable en ce point. Exprimer à l'aide d'une intégrale le poids total situé sous la section $S(x)$.
2. On note $f(x)$ l'intégrale entre 0 et x de la fonction $t \mapsto S(t)$. Montrer que f vérifie une équation différentielle du premier ordre.
3. En résolvant cette équation différentielle, déterminer la fonction $S(x)$, puis le rayon $r(x)$ du cable à une distance x de la cage.

2 Travail demandé au candidat

1. Où se trouvent à votre avis les difficultés pour les élèves?
2. Aurait-on pu supprimer la question 1.?
3. Que se passe-t-il si $P = 0$ (interprétation)?

   Dans ce cas, quel autre énoncé pourrait-on proposer?
4. Proposer d'autres exemples de situation dépendant du même thème mathématique.

source: Dossier de la préparation d'0rsay, 2004.