Alcoolémie

1 Enoncé

Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) à l'instant t (en heure) de son organisme. On considère que f est définie par l'équation différentielle:

$$\frac{df}{dt} = a\exp(-t) - f(t),$$

dans laquelle a est une constante positive dépendant de la personne elle-même et de la quantité absorbée, avec la condition initiale $f(0) = 0$.

1. On pose $g(t) = e^t f(t)$. Calculer $g(t)$ et en déduire que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de a et de t.
3. On pose $a = 5$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f et la représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$.
   (b) Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.
   (c) Trouver graphiquement au bout de combien de temps la personne peut prendre le volant sans enfreindre la législation
   (le taux maximum autorisé est de 0.5 gramme par litre).

2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Préciser l'équation différentielle qui prendrait seulement en compte la phase d'éliminitation de l'alcool.
3. Indiquer comment on peut justifier (au moins partiellement) l'équation différentielle de l'énoncé.
4. Un conducteur arrêté par la maréchaussée au maximum de son ébriété prétend n'avoir bu qu'un peu de vin à 12 degrés.
   Proposer une question supplémentaire à l'exercice (avec les mêmes données numériques) permettant de déterminer quelle quantité il a bu (on rappelle que le corps humain contient environ 6 litres de sang).
5. Proposer un autre exemple de situation menant à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

source: Dossier de D. Perrin, Orsay, 2004