Monotonie d'une suite d'Euler

1 Enoncé

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$.
2. Soient $0 < x < y$. On pose, pour $t \in [0,1]$, $f(t) := \ln(tx + (1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y)$.
   (a) Déterminer les signes de $f'(0)$ et de $f'(1)$.
   (b) Montrer que $f'' < 0$ sur $[0,1]$.
   (c) En déduire que $\ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y)$, et que l'on a l'égalité que si $t = 0$ ou 1.
   (d) En déduire que $\exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y)$, et que l'on a l'égalité que si $t = 0$ ou 1.
3. Montrer par récurence sur n l'inégalité $\dfrac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$, où $x_1, \cdots, x_n$ sont des nombres strictements positifs.
   Quand a-t-on égalité?
4. Démontrer l'inégalité suivante et discuter des cas possibles d'égalité
$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad x_1 \geq 0, \cdots x_n \geq 0, \cdots$$
5. En écrivant $u_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 1 \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
6. Montrer que $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in R$.
7. En déduire que $u_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e = \exp(1)$.
8. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
9. Vérifier numériquement à l'aide de votre calculatrice que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.
10. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 1$ et conclure.

2 Travail demandé au candidat

Pendant sa préparation le candidat réfléchira aux questions suivantes

1. Quelle est la théorie mathématique qui sous-tend les questions 1.,2.,3.,4.?
   Comment montreriez-vous simplement ces résultats avec des outils post-bac?

2. Déceler les pièges que renferme cet énoncé pour les élèves. Par exemple, les cas d'égalités sont-ils trop difficiles?

3. Donner les interprétations géométriques aux résultats de cet énoncé.

4. Penser à d'autres démonstrations du niveau du lycée pour démontrer la croissance de (u_n), par exemple:

   (a) En utilisant l'inégalité de Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$, et en calculant une minoration de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

   (b) A l'aide d'un étude de fonction: Soit $f(x) = (1+x)^{1/x} = \exp(\varphi(x))$, où $\varphi(x) := \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
   On montrera que φ est décroissante.

5. Etudier la monotonie de $v_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Le candidat rédigera sur ses fiches les réponses aux questions:

- La question 3.
- La question 5.

source: Dossier modifié en 2006 de la préparation d'0rsay, 2005.