Test sanguin

1 Enoncé

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une certaine maladie. Ce test présente les caractéristiques techniques suivantes:

- La probabilité qu'un individu atteint de cette maladie ait un test positif est de 0.95.
- La probabilité qu'un individu non atteint de cette maladie ait un test négatif est aussi de 0.95.

On choisit un individu au hasard et on note:

- M l'événement " l'individu choisi présente la maladie étudiée" et $\overline{M}$ l'événement contraire.
- T l'événement " le test effectué sur l'individu est positif" et $\overline{T}$ l'événement contraire.

1. On veut faire un dépistage systématique dans une population donnée et l'on sait que la proportion d'individus atteints de la maladie dans la population est 0.001 (autrement dit 1 individu sur 1000 est atteint de cette maladie).
   (a) Réaliser un arbre pondéré décrivant cette situation.
   (b) Calculer la probabilité $P(T)$.
   (c) Calculer la probabilité $P_T(M)$ qu'un individu présentant un test positif soit atteint de la maladie.
   Ce nombre $P_T(M)$ représente la valeur prédictive du test.
2. On s'intéreese aux variations de cette valeur prédictive selon la proportion d'individus atteint de cette maladie dans la population.
   (a) On considère une population à risque pour la maladie considérée. On sait que, dans cette population, 25 individus sur 100 sont attteints de cete maladie.
   Quelle est alors la valeur prédictive du test?
   (b) On considère maintenant une troisième population et l'on note x la proportion d'individus atteint de cette maladie.
   Déterminer en fonction de x la valeur prédictive du test pour cette population.
   Pour quelle valeur de x, un individu dont le test est positif, a-t-il une chance sur deux d'être malade?

2 Travail demandé au candidat

1. Quels sont les objectifs et les outils de cet exercice?
2. Cet exercice utilise implicitement une formule qui n'est pas au programme du lycée. Quelle est cette formule?
3. Pourquoi cette exercice est du niveau Bac S et ES, enseignement obligatoire.
4. Cet exercice cherche à faire passer un message sur la validité des tests.
   Exprimer ce message clairement et simplement.
5. Finalement, d'où vient la source d'erreur de l'interprétation du résultat du test?
   Expliquer, sans calcul pourquoi cette source d'erreur est compréhensible.
   Connaisez vous un ou plusieurs résultats mathématiques relatifs à cette source d'erreur?
6. Proposer d'autres exercices relevant de la même problématique qui apporteraient d'autres éléments intéressants.

source: Documents d'accompagnement pour la série S et ES, CNDP, 2004.