Une petite chaîne de Markov

1 Enoncé

Une grande entreprise propose à ses employés deux types d'horaires mensuels, fixes ou variables. Chaque trimestre, tous les employés sont consultés sur le type d'horaire qu'ils désirent adopter au trimestre suivant.

Au début de l'expérience, 60% des employés sont favorables aux horaires fixes. Autrement dit l'état probabiliste initial est décrit par la matrice ligne $P_0 = (0.6 \quad 0.4)$.

On estime qu'un employé préférant les horaires fixes un trimestre donné garde sept fois sur dix le même avis au trimestre suivant, alors qu'un employé préférant les horaires variables change d'avis une fois sur cinq au trimestre suivant.

On suppose que les effets des changements de personnel dans l'entreprise sont négligeables.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. On admet que la matrice de transition M de ce graphe est égale à

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

   (a) Donner l'état probabiliste deux trimestres après le début de l'expérience et interpréter le résultat obtenu.

   (b) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

2 Travail demandé au candidat

1. Quels sont les objectifs et les outils de cet exercice?
2. Pourquoi cette exercice est dun niveau Bac S et ES spécialité Mathématiques.
3. Donner la vitesse de convergence de l'état probabiliste vers l'état stable. Pour cela, utiliser des connaissances post-bac.

   Peut-on envisager de faire trouver aux élèves cette vitesse de convergence en ajoutant des questions à l'énoncé?
4. Dans cette question on considère l'énoncé plus géneral suivant dépendant de deux paramétres ff et vf:
   "On estime que la proportion d'employés préférant les horaires fixes un trimestre donné et gardant le même avis au trimestre suivant est ff, alors que la proportion d'employés préférant les horaires variables et changeant d'avis au trimestre suivant est vf.
   On garde le même énoncé par ailleurs

   (a) Ecrire la matrice de transition M.

   (b) Au niveau DEUG, justifier l'existence d'un état stable.

   (c) Peut-on avoir plusieurs états stables?

   (d) Donner une information sur la vitesse de convergence.

   (e) Qu'en déduire pour ce type d'exercice au niveau lycée?
5. Proposer d'autres exercices relevant de la même problématique qui apporteraient d'autres éléments intéressants.

source: Documents d'accompagnement pour la série S et ES (spécialité), CNDP, 2004.