Calcul approché de π à l'aide de la méthode de Monte-Carlo

1 Enoncé

On considère une vecteur aléatoire M de coordonnés (X,Y) tels que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

On dira que M suit la loi uniforme sur le carré $C = [0,1] \times [0,1]$.

1. Calculer les probabilités suivantes
   (a) $P(X \leq \frac{1}{2} \text{ et } Y \leq \frac{1}{2})$.
   (b) $P(X \leq Y)$,
   (c) $P(X = Y)$
   (d) $P(M \in [a,b] \times [c,d])$ où $[a,b] \times [c,d]$ est un rectangle contenu dans le carré C.
   (e) $P(Y < aX + b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

   On donnera pour chaque exemple une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2. Soit A une partie de C, expliquez pourquoi
$$P(M \in A) = \text{Aire}(A).$$
   On admettra ce résultat pour toute la suite de l'exercice.

3. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$, montrez que:
$$P(Y \leq f(X)) = \int_0^1 f(x)dx.$$

4. A l'aide de la touche "nombre aléatoire de $]0,1[$" de votre calculatrice, simulez n fois le vecteur M et vérifiez expérimentalement un des résultats de la question 1.

   Pour cela on calculera la fréquence de l'événement choisi.

   On prendra $n = 100$ et l'on comparera les fréquences obtenues aux probabilités théoriques obtenues dans la question 1.

5. Application à un calcul approché de π:
   (a) Pour $x \in [0,1]$ on pose $f(x) := \sqrt{1-x^2}$. Montrez que:
$$\pi = 4 \times P(Y < f(X)) = P(X^2 + Y^2 < 1).$$
   (b) Exécutez plusieurs simulations de M pour obtenir une valeur approchée de π.

6. Etude de la précision:
   En statistiques, on admet que :
   - si un événement (E) à une probabilité p de survenir au cours d'une expérience aléaltoire (A),
   - si l'on exécute n fois l'expérience (A) de manières indépendantes, et que l'on note f_n la fréquence d'apparition de l'événement (E) au bout de ces n simulations de (A),
   - et si $n \geq 30$, $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$,

   alors, dans 95% des cas:
$$|f_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
   Utilisez cette fourchette, et, à l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de π d'amplitude 10^{-1}, puis 10^{-2}.

2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Proposez d'́ventuelles modifications de l'énoncé.
3. Donner les notions Mathématiques qui permettent de justifier rigoureusement le résultat de la question 2.
4. Faut-il faire des hypothèses sur f dans la question 3.?
5. Calculer l'espérance et la matice de covariance de M.

   Interpréter le résultat obtenu.
6. Sur quoi repose les résultats des questions 4. et 6.?
7. Dans la question 6. ne faudrait-il pas d'abord faire minorer l'entier n à l'èlève?
8. Discuter l'optimalité de l'encadrement obtenu à la question 6.
9. Proposer un autre exercice permettant de calculer une valeur approchée du nombre π, par une méthode géométrique ou analytique.

   Donner notamment deux autres méthodes pour approcher π à l'aide du calcul intégral. Puis comparer, l'efficacité de ces méthodes par rapport à la méthode de Monte-Carlo.