$f(x)f'(x) = 1$ et méthode d'Euler

1 Enoncé

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0,+\infty[$ vérfiant les conditions

$$f(x)f'(x) = 1 \text{ pour tout } x \geq 0, \qquad \text{et } f(0) = 1. \tag{1}$$

1. On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1).

   La méthode d'Euler permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction f. On choisit le pas $h = 0,1$.

   On admet que les coordonnées (x_n, y_n) des points M_n obtenus en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient pour tout $n \geq 0$:

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, & x_0 &= 0 \\ y_{n+1} &= x_n + \frac{h}{y_n}, & y_0 &= 1. \end{aligned}$$

   Calculer les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (on arrondira au millième les valeurs trouvées).

2. On se propose de démontrer qu'une fonction f qui vérifie (1) est nécessairement strictement positive sur $[0,+\infty[$.

   (a) Montrer que si f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

   (b) On suppose que f vérifie (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$.
   En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,a]$.

   (c) Conclure.

3. Existence et unicité de la fonction f.

   (a) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.

   (b) En déduire que si f est telle que: $f(x)f'(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$, alors il existe une constante C telle que: $(f(x))^2 = 2x + C$ pour tout $x \geq 0$.

   (c) On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x \geq 0$.

   (d) En déduire les valeurs arrondies au millème de $f(h), f(2h), f(3h), f(4h), f(5h)$, puis les comparer avec les valeurs obtenues par la méthode d'Euler.

2 Travail demandé au candidat

1. Donnez tous les prérequis nécessaires avant d'aborder l'exercice proposé.
2. Proposez un exercice introduisant et expliquant la *méthode* d'Euler.
3. Pouquoi l'énoncé demande une précision au millième?
4. Peut on appliquer pour le problème (1) la méthode d'Euler sur tout $\mathbb{R}$? Essayez à l'aide de votre calculatrice.
5. Quels sont les intérêts de la méthode d'Euler?

source: Documents d'accompagnement pour la série S, CNDP, 2004.