CAPES Externe de Mathématiques
Epreuve sur dossier 2005 Sujet zéro 2

Exemple d'encadrement d'une intégrale à l'aide d'encadrement de la fonction intégrée

1 L'exercice proposé au candidat

L'objet de cet exercice est de donner des valeurs approchées de l'intégrale I :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-t}}{1-t} dt$$

1. Vérifier que pour tout $t \neq 1$ on a l'égalité :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \frac{t^2}{1-t}$$

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}(1+t)dt$.

3. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$:

$$t^2 \leq \frac{t^2 e^{-t}}{1-t} \leq \frac{2t^2}{\sqrt{e}}$$

et en déduire un encadrement de I.

2 Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

1. Après avoir résolu l'exercice :
   (a) Dégager l'idée clef sur laquelle repose la méthode utilisée dans cet exercice.
   (b) On souhaite construire, suivant la même méthode, un nouvel exercice donnant un encadrement plus précis pour I. Dans ce but, on remplace la question 2) de l'exercice par la question : calculer l'intégrale $K = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}(1+t+t^2)dt$.
   Proposer alors une modification des questions 1) et 3) afin d'obtenir un encadrement de I plus fin que celui obtenu dans l'exercice initial.
   (c) Décrire le cadre général de la méthode précédente et donner une majoration de l'erreur de cette méthode.

(d) Suivant les bases de la méthode précédente, construire l'énoncé d'un nouvel exercice qui conduise au calcul des valeurs approchées de $\ln(2)$ ou de $\frac{\pi}{4}$, au choix.

2. Proposer un autre exercice d'encadrement d'intégrale par une méthode de votre choix.