Algorithme de Babylone

1 Exercice proposé au candidat:

1. **La quadrature du rectangle** résolu numériquement par les Babyloniens.
   Soit un rectangle R_0 de largeur a et de longueur b: $0 < a < b$. On cherche le carré R_∞ de même aire que R_0. Le but de l'exercice est de calculer assez précisément la longueur d'un côté de ce carré sans utiliser la touche racine carrée de votre calculatrice non disponible à l'époque. Pour cela, on va d'abord donner les mesures A et B d'un rectangle R_1 de même aire que R_0.

   (a) Soit $B = \dfrac{a+b}{2}$. Montrer que le carré de côté B est trop grand.

   (b) Calculer A pour que le rectangle R_1 de largeur A et de longueur B ait la même aire que R_0.

   (c) Montrer que $0 < a < A < B < b$.

   Ainsi, on peut recommencer le procédé, obtenir un nouveau rectangle R_2 et ainsi de suite.

   (d) On se donne $a = 1$ et $b = 2$, calculer les mesures des rectangles R_1, R_2, R_3, R_4 ainsi obtenues. Que remarquez vous?

   (e) Si R_0 est carré, que pouvez vous dire de R_1?

2. **Suites adjacentes**. Soit R_n le rectangle obtenue à partir de n utilisations de la méthode des Babyloniens. On note a_n sa largeur et b_n sa longueur.

   (a) Montrer que pour tout n:

   i. $0 < a_n < b_n$,

   ii. $(a_n b_n)_n$ est une suite constante,

   iii. $(b_n)_n$ est décroissante,

   iv. $(a_n)_n$ est croissante.

   (b) On note a_∞ la limite de la suite $(a_n)_n$ et b_∞ la limite de la suite $(b_n)_n$. Montrer que $a_\infty = b_\infty$. indications: on pourra appliquer une étape de l'algorithme de Babylone au "rectangle" R_∞ de mesures a_∞, b_∞.

   (c) En déduire les limites des mesures de R_n.

3. **Vitesse de convergence.**

   (a) Montrer que $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(b_n + \dfrac{ab}{b_n}\right)$, $b_0 = b$.

   (b) Soit $v_n := \dfrac{b_n - \sqrt{ab}}{b_n + \sqrt{ab}}$. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.

   (c) En déduire que $0 < b_n - \sqrt{ab} < 2b v_0^{(2^n)}$.

   (d) Tester numériquement cette dernière inégalité pour $a = 1$ et $b = 2$.

2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas le candidat ne doit rédiger surs sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totatlité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation le candidat traitera les question suivantes:

1. Chercher les objectifs de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Faut-il ajouter des indications à cet énoncé pour le traiter en TS.
3. Discuter l'optimalité de l'encadrement obtenu à la question $3.(c)$.
4. Pourquoi l'algorithme de Babylone est-il si performant?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera;

- Sa réponse à la question 1.
- Un seul exercice simple pour approcher $\sqrt{2}$.

source: Babylone, il y a 2500 ans.