$$u_{n+1} = au_n + b$$

1 Enoncé

On suppose que dans une période donnée, la population d'un pays est constante et égale à 60 millions d'habitants, dont 40 millions vivent en zone rurale et 20 millions en ville.

On constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante: " chaque année 20 % des ruraux émigrent à la ville et 10 % des citadins émigrent en zone rurale".

On note respectivement v_n et r_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux au bout de n années.

1. Première méthode

   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a:

   $$v_{n+1} = 0.9v_n + 0.2r_n \text{ et } r_{n+1} = 0.1v_n + 0.8r_n.$$

   (b) Que vaut $v_n + r_n$?
   En déduire les relations:

   $$v_{n+1} = 0.7v_n + 12 \text{ et } r_{n+1} = 0.7r_n + 6.$$

   (c) Exprimer r_n et v_n en fonction de n et étudier les limites de (r_n) et (v_n).

2. Deuxième méthode

   (a) On considère la suite (p_n) définie par $p_n := \dfrac{v_n}{r_n}$.
   Montrer qu'elle vérifie les relations de récurrence

   $$p_0 = 0.5 \text{ et } p_{n+1} = \frac{9p_n + 2}{p_n + 8}.$$

   (b) On pose $q_n := \dfrac{p_n - 2}{p_n + 1}$.
   Montrer que la suite (q_n) est géométrique et exprimer q_n et p_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (p_n) puis celles des suites (v_n) et (r_n).

3. A l'aide de la calculatrice, vérifier numériquement la convergence de (v_n) et (r_n).

2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Indiquer comment un élève pourrait trouver la limite de (p_n) sans introduire la suite (q_n).
3. Expliquer le choix de la suite (q_n) de la question 2..
4. Proposer un ou deux autres exercices menant à l'étude de suites arithmétiques ou géométriques.

source: Dossier de D. Perrin, Orsay, 2004