Problèmes conduisant à des suites arithmétiques, géometriques ou arithmético-géometriques.

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1 Enoncé

Le but de cet exercice est de résoudre un problème de dénombrement à l'aide de suites géométriques.

Une introduction possible de l'exercice: Deux élèves travaillent sur un projet de conception de logiciel. Ce logiciel doit servir à une machine pour donner de la monaie en pièces de 1 ou 2 Euros. L'utilisateur devra donner une certaine somme n à l'aide de sa carte bleue et la machine devra lui rendre la même somme en pièces de 1 ou 2 Euros. Bien sûr, la machine pourrait rendre seulement des pièces de 2 Euros si n est pair, ou une seule pièce de 1 Euro et des des pièces de 2 Euros si n est impair. Mais, un meilleur partage entre les deux types de pièces serait préférable. Une question naturelle est de savoir *de combien de manières différentes peut-t-on partager n Euros en pièces de 1 Euros et de 2 Euros.* De plus, la machine rend les pièces une par une. Ce qui fait d'autant plus de possibilités si on compte aussi *l'ordre d'apparition des pièces.* On notera u_n ce nombre de manières différentes en comptant l'ordre d'apparition des pièces.
Ainsi, pour u_4 on aura 5 distributions possibles, notées succintement: $(2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1)$.

Des élèves pensent quand même que u_n est proportionnel à n.
Le but de l'exercice est de calculer u_n en fonction de n.

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.
2. Donner une relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n. Quelle valeur faudrait-il donner à u_0?
3. Exprimer u_n en fonction de n à l'aide de suites géométriques.
4. Donner les valeurs de u_n pour $1 \leq n \leq 20$, et $n = k \times 10, 1 \leq k \leq 10$.

2 Travail demandé au candidat

1. L'énoncé précédent n'est clairement pas adapté à des élèves de Lycée. Les questions 2. et 3. sont quasiment infaisables pour des lycéens. Complétez et modifiez cet énoncé pour qu'il soit adapté à des élèves de terminale S. Cet énoncé devra inciter les élèves à utiliser la calculatrice.
2. Rédiger sur une feuille séparée la solution de l'exercice
3. Mettez en valeur les différentes étapes et les différents outils qui peuvent être mis en lumière par un tel type d'exercice.
4. Proposez d'autres exercices, relevant de ce Dossier. Ce choix d'exercices supplémentaires devra compléter harmonieusement le problème demandé en fonction du programme du Lycée.
5. On pourrait aussi introduire l'exercice en considérant le nombre de manières de monter un escalier de n marches, en montant les marches une par une ou deux par deux.