6756 Agrégation de mathématiques – concours interne deuxième épreuve

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, relatifs, des nombres réels, complexes.

La composition des applications est notée $\circ$.

On pose $\mathrm{I} = [0, 1]$.

$\mathscr{C}(\mathrm{I})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions définies et continues sur I, à valeurs complexes.

$\mathscr{C}^1(\mathrm{I})$ est le sous-espace des fonctions continûment dérivables sur I.

$\hat{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur I. La dérivée d'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I})$ est notée f'.

a et b sont les applications de I dans I définies par :

$$a(x) = \frac{x}{2}, \qquad b(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Soit p un réel fixé, $0 < p < 1$, et $q = 1 - p$. À toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I})$ on associe la fonction $\mathrm{T}(f) \in \mathscr{C}(\mathrm{I})$ définie par :

$$\mathrm{T}(f)(x) = pf \circ a(x) + qf \circ b(x) = pf\left(\frac{x}{2}\right) + qf\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

T est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathrm{I})$. Pour $n \geqslant 0$, T^n est le n-ième itéré de T, c'est-à-dire que, pour $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I})$, $\mathrm{T}^0(f) = f$ et, pour $n \geqslant 0$, $\mathrm{T}^{n+1}(f) = \mathrm{T}^n(\mathrm{T}(f)) = \mathrm{T}(\mathrm{T}^n(f))$. Lorsque aucune confusion n'est à craindre, on notera $\mathrm{T}f$ et $\mathrm{T}^n f$ au lieu de $\mathrm{T}(f)$ et $\mathrm{T}^n(f)$.

Dans tout le problème λ désigne un nombre complexe et on pose :

$$\mathrm{E}_\lambda = \{f : f \in \mathscr{C}(\mathrm{I}),\ \mathrm{T}f = \lambda f\}.$$

AVERTISSEMENT

Les résolutions des questions II.3., IV.6. et V.3. font appel à des propriétés établies dans d'autres parties du problème. À ces exceptions près, les différentes parties peuvent être traitées séparément.

I. Étude de E_λ, lorsque $p = \frac{1}{2}$

Dans cette partie $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1.

a. Vérifier que, pour $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I})$ et $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{T}^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right).$$

b. Soit $x \in \mathrm{I}$. En remarquant que, pour tout $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, $\dfrac{k}{2^n} \leqslant \dfrac{x+k}{2^n} \leqslant \dfrac{k+1}{2^n}$, montrer que la suite $(\mathrm{T}^n f(x))_{n \geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

c. Conclure que :

i. $\mathrm{E}_1 = \{\alpha \hat{1} : \alpha \in \mathbb{C}\}$;

ii. pour $|\lambda| \geqslant 1$ et $\lambda \neq 1$, $\mathrm{E}_\lambda = \{0\}$.

2. Soit $|\lambda| < 1$.

a. Montrer que la formule :

$$g_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \cos(2^k \pi x)$$

définit une fonction continue sur I.

b. Vérifier que $g_\lambda \in E_\lambda \setminus \{0\}$.

3. On pose $E_\lambda^1 = E_\lambda \cap \mathscr{C}^1(I)$.

a. Établir que, si $|\lambda| < \frac{1}{2}$, $E_\lambda^1 \neq \{0\}$.

b. Pour $f \in \mathscr{C}^1(I)$, comparer $T(f')$ et $(Tf)'$.

En utilisant 1. :

i. montrer que $|\lambda| < 1$ et $E_\lambda^1 \neq \{0\}$ impliquent $|\lambda| < \frac{1}{2}$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$;

ii. expliciter $E_{\frac{1}{2}}^1$.

II. Application à un développement eulérien

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $J_N = \left[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}\right]$.

1.

a. Soit $N \in \mathbb{N}$. Prouver que la série :

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

converge uniformément sur J_N.

b. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}.$$

Montrer que φ est continue et que $\lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

2.

a. Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$, et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On pose :

$$S_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

Déterminer les entiers m_1, n_1 et m_2, n_2 tels que :

$$S_m^n(x+1) = S_{m_1}^{n_1}(x), \qquad \frac{1}{2}\left[S_m^n\left(\frac{x}{2}\right) + S_m^n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = S_{m_2}^{n_2}(x).$$

b. Établir, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, les relations :

$$\varphi(x+1) = \varphi(x), \qquad \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = \varphi(x).$$

3. La fonction δ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par $\delta(x) = \varphi(x) - \pi \cot(\pi x)$.

a. Montrer que δ se prolonge en une fonction $\hat{\delta}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\delta}(0) = 0$.

b. En considérant la restriction $\hat{\delta}_1$ de $\hat{\delta}$ à I, conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}.$$

III. Étude de E_λ, $|\lambda| \geq 1$, lorsque p est quelconque, $0 < p < 1$

1. Soit $x_0 \in I$. On pose :

$$D_0 = \{x_0\} \text{ et, } \quad \text{pour} \quad n \geq 0, \quad D_{n+1} = a(D_n) \cup b(D_n).$$

a. Expliciter D_n.

b. Prouver que $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ est dense dans I.

2. Soit $g \in \mathscr{C}(I)$ à valeurs réelles telle que :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad p[g \circ a(x) - g(x)] + q[g \circ b(x) - g(x)] \geq 0.$$

a. Justifier que $M = \sup\{g(x) : x \in I\}$ est fini et que $A = \{x : x \in I, g(x) = M\}$ est non vide.

b. Soit $x \in A$, prouver que $a(x) \in A$ et $b(x) \in A$.

c. Conclure que g est constante.

3. Dans cette question, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Soit $f \in E_\lambda \setminus \{0\}$.

a. Montrer que la fonction g définie sur I par $g(x) = |f(x)|$ est constante.

b. On note $\operatorname{Re} z$ la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$. Pour $x \in I$, établir successivement que :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f \circ a(x)}{\lambda f(x)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{f \circ b(x)}{\lambda f(x)}\right) = 1, \quad f \circ a(x) = f \circ b(x) = \lambda f(x).$$

c. Conclure que :

i. $E_1 = \{\alpha \mathbb{1} : \alpha \in \mathbb{C}\}$;

ii. pour $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, $E_\lambda = \{0\}$.

4. Prouver que, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, $E_\lambda = \{0\}$.

IV. Étude de la convergence de la suite $(T^n f)_{n \geq 1}$, lorsque p est quelconque, $0 < p < 1$

L'espace $\mathscr{C}(I)$ est muni de la norme uniforme :

$$\text{pour } f \in \mathscr{C}(I), \qquad \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in I\}.$$

1. Vérifier que T est un endomorphisme continu de norme 1 de $\mathscr{C}(I)$.

2.

a. Justifier que $\mathscr{C}^1(I)$ est dense dans $\mathscr{C}(I)$.

b. Montrer que $E_1 = \{\alpha \mathbb{1} : \alpha \in \mathbb{C}\}$ est un fermé de $\mathscr{C}(I)$.

3. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I)$ de dérivée f' et $n \in \mathbb{N}$.

a. Établir l'inégalité :

$$\sup\{|T^n f(x) - T^n f(y)| : x, y \in I\} \leq 2^{-n} \|f'\|.$$

b. En déduire que $\|T(T^n f) - T^n f\| \leq 2^{-n} \|f'\|$.

c. Prouver que la suite $(T^k f)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathscr{C}(I)$ vers une fonction notée $\Pi_1 f$ et que :

$$\|T^n f - \Pi_1 f\| \leq 2^{-n+1} \|f'\|.$$

d. Montrer que la fonction $\Pi_1 f$ est constante.

4. Soit Π_1 l'application qui, à $f \in \mathscr{C}^1(I)$, fait correspondre $\Pi_1 f$.

a. Montrer que Π_1 est un endomorphisme de $\mathscr{C}^1(I)$ dont l'image est E_1.

b. Vérifier que, sur $\mathscr{C}^1(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme, Π_1 est continu, de norme 1.

5.

a. Prouver que Π_1 se prolonge, de façon unique, en un endomorphisme Π de $\mathscr{C}$(I), continu, de norme 1, dont l'image est E_1.

b. Démontrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}$(I) :

$$\lim_n \|T^n f - \Pi f\| = 0.$$

c. Vérifier que $\Pi \circ T = \Pi$ et que Π est un projecteur sur le sous-espace E_1.

6.

a. Pour $p = \frac{1}{2}$, expliciter Π.

b. Soit la fonction $h \in \mathscr{C}$(I) définie par $h(x) = x$. Calculer Πh. Que peut-on en conclure sur les projecteurs Π' et Π'' correspondant à deux valeurs distinctes p' et p'' du paramètre $p \in]0, 1[$?

V. Application à la convergence des moyennes ergodiques associées à une transformation de I

Dans cette partie, $p = q = \frac{1}{2}$.

Soit θ l'application de I dans I définie par :

$$\theta(x) = 2x, \qquad \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[;$$

$$\theta(x) = 2x - 1, \qquad \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

On pose $\theta^0(x) = x$ et, pour $n \geqslant 0$, $\theta^{n+1}(x) = \theta(\theta^n(x)) = \theta^n(\theta(x))$.

On désigne par $\mathscr{D}$(I) l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f, définies sur I, à valeurs réelles, telles que $f(0) = f(1)$, continues par morceaux et continues à droite.

On rappelle que les fonctions continues par morceaux sur I sont intégrables. On admettra, d'une part que, si $f \in \mathscr{D}$(I), alors $Tf \in \mathscr{D}$(I) et $f \circ \theta \in \mathscr{D}$(I), d'autre part que les formules :

$$f, g \in \mathscr{D}(I), \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx, \quad \|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}},$$

définissent un produit scalaire et une norme sur $\mathscr{D}$(I).

1. Soient $f, g \in \mathscr{D}$(I).

a. Vérifier que $T(g \circ \theta) = g$.

b. Montrer que $\langle f \circ \theta, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$.

c. En déduire que, pour $k, \ell \geqslant 0$, $\langle f \circ \theta^{k+\ell}, g \circ \theta^\ell\rangle = \langle f, T^k g\rangle$.

Pour $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{D}$(I), on pose $M_n f = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} f \circ \theta^\ell$.

2. Prouver que, pour $f \in \mathscr{D}$(I) :

$$\|M_n f\|_2^2 = \frac{1}{n}\langle f, f\rangle + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \langle f, T^k f\rangle.$$

3. Soit $f \in \mathscr{D}(I) \cap \mathscr{C}^1(I)$ et $\bar{f} = \left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) \mathbf{1}$. Utiliser la partie IV pour établir l'existence d'une constante c telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$:

$$\|M_n f - \bar{f}\|_2 \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}.$$