

Groupe des similitudes d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 ;
 groupe $O_3(\mathbb{R})$. Équation $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ dans \mathbb{C} .
 Structure d'anneau euclidien de l'ensemble des entiers de Gauss, p.g.c.d.
 Application au groupe $O_3(\mathbb{Q})$

ÉNONCÉ

On rappelle aux candidats que toutes les questions d'applications et de représentations graphiques sont importantes.

On se donne un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour un point de coordonnées (x, y, z) , on appelle x l'abscisse, y l'ordonnée, z la cote de ce point.

I

1° On considère des endomorphismes f et g de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 dont le produit de composition $f \circ g$ est une homothétie h .

A-t-on toujours $g \circ f = h$ si le rapport de h est nul ?

2° On considère un réel l , strictement positif, une matrice carrée 3×3 à coefficients réels M et sa transposée M^T :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si,

$$(2) \quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0 \end{cases}$$

3° On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(a_1, a_2, 0)$, $(b_1, b_2, 0)$ et $(c_1, c_2, 0)$. On introduit les nombres complexes

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad c = c_1 + ic_2.$$

a) Démontrer que A, B, C sont les projections, sur le plan de cote nulle, des sommets d'un cube reliés à O par une arête de ce cube si, et seulement si,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad \text{et} \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0.$$

b) Sous les conditions précédentes calculer l'arête l d'un tel cube et les cotes respectives a_3, b_3 et c_3 de ses sommets projetés en A, B, C en fonction de a_1, b_1, c_1 et de a_2, b_2, c_2 .

4° Applications.

a) Lorsque $a = 3i, b = 4i, c = 5$ et $a_3 > 0$ représenter la projection orthogonale du cube sur le plan de cote nulle, xOy , puis compléter le dessin par la projection orthogonale du cube sur le plan d'abscisse nulle, yOz . On présentera ce dessin, ainsi que le suivant, sur papier millimétrique en prenant pour unité le demi-centimètre. On prendra les deux axes Oy parallèles et de même sens.

b) Pour $a = 3 + 2i$ et $b = 6 - 3i$ calculer c tel que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Dessiner la projection orthogonale sur le plan de cote nulle des cubes associés à (a, b, c) ainsi déterminés. Calculer l'arête l de ces cubes. Indiquer sur le dessin les cotes des sommets du cube dont le sommet projeté en C a une abscisse et une cote positives.

5° Soit φ un endomorphisme du plan euclidien \mathbb{C} des nombres complexes.

a) Démontrer qu'il existe un et un seul couple (u, v) de nombres complexes tel que pour tout z de \mathbb{C} , $\varphi(z) = uz + v\bar{z}$.

b) Démontrer que φ est bijectif si, et seulement si, $|u| \neq |v|$.

6° On suppose qu'il existe des nombres complexes a, b, c non tous nuls tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad \text{et} \quad (\varphi(a))^2 + (\varphi(b))^2 + (\varphi(c))^2 = 0.$$

Démontrer que φ est une similitude.

7° Dans l'espace on appelle similitude de rapport $\lambda > 0$, la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie.

Démontrer que la similitude du plan de cote nulle associée à φ se prolonge en une similitude de l'espace qui transforme un cube associé à (a, b, c) en un cube associé à $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$.

II. - A

A) Soit G l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + ni$ avec m et n entiers (relatifs).

A tout point z du plan complexe on associe le nombre $k(z)$ des points p de G tels que $|z - p| < 1$.

1° Démontrer que si la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers alors $k(z) = 1$.

2° Démontrer que pour tout nombre complexe z on a

$$k(z) = k(z + 1) = k(z + i) = k(iz) = k(\bar{z}).$$

En déduire que pour tout nombre complexe z , il existe un nombre complexe $z' = x' + iy'$ vérifiant

$$0 \leq y' \leq x' \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k(z) = k(z').$$

3° a) Vérifier que $|z'| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Démontrer que si p dans G est tel que $|z' - p| < 1$ alors p est l'un des nombres $0, 1, i$ ou $1 + i$.

c) Vérifier que $|z' - 1| < 1$ sauf pour $z' = 0$.

4° Démontrer que $1 \leq k(z) \leq 4$, avec $k(z) = 1$ si, et seulement si, la partie réelle et la partie imaginaire de z sont des entiers.

5° Calculer $k\left(\frac{1+i}{3}\right), k\left(\frac{1+i}{4}\right)$ et $k\left(\frac{5+i}{12}\right)$.

II. - B

1° Démontrer que l'ensemble G forme un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ?

2° a) Sachant que, pour tout nombre complexe z , il existe un élément q de G tel que $|z - q| < 1$, démontrer que, pour tous a et b éléments de $G, b \neq 0$, il existe q et r dans G tels que

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad |r| < |b|.$$

Observer (d'après II. A.) qu'un tel couple (q, r) est unique si, et seulement si, le quotient $\frac{a}{b}$ est dans G ; dans ce cas on dit que b est un diviseur de a (dans G).

b) Calculer tous les diviseurs de 2 dans G .

c) Démontrer que $1 + i$ est un diviseur de l'élément a dans G si, et seulement si, la partie réelle et la partie imaginaire de a ont la même parité.

3° a) Démontrer que si a, b, q, r , sont des éléments de G tels que $a = bq + r$ les éléments a et b ont les mêmes diviseurs communs dans G que les éléments b et r .

b) En déduire que si a et b sont deux éléments non nuls de G il existe un et un seul élément de G , que l'on notera $a \wedge b$, et qui possède les propriétés suivantes :

- $a \wedge b$ est un diviseur commun à a et b ,
- tout diviseur commun à a et b divise $a \wedge b$,
- la partie réelle de $a \wedge b$ est strictement positive et sa partie imaginaire est positive ou nulle.

c) Calculer $(4 - 7i) \wedge (8 + i)$.

4° Soit a et b des éléments non nuls de G .

a) Démontrer qu'il existe des éléments u et v de G tels que $au + bv = 1$ si, et seulement si, $a \wedge b = 1$.

b) En déduire que $a \wedge b^2 = a^2 \wedge b^2 = 1$ dès que $a \wedge b = 1$.

c) Soit c un élément de G ; démontrer que si $a \wedge b = 1$ et si a est un diviseur de bc alors a est un diviseur de c .

III

Les cubes associés, comme il a été vu dans la première partie, aux triplets (a, b, c) d'éléments de G non tous nuls et tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ sont appelés des G-cubes. Un G-cube pour lequel a, b, c ont un diviseur commun dans G autre que $1, -1, i$ ou $-i$ est dit réductible (relativement à sa projection sur le plan de cote nulle); tout autre G-cube sera dit irréductible.

1° Combien y a-t-il de G-cubes irréductibles associés aux triplets (a, b, c) vérifiant $abc = 0$?

On suppose dorénavant que a, b, c sont des éléments non nuls de G , tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, et tels que les seuls diviseurs communs à a, b, c dans G soient $1, -1, i$ et $-i$.

2° a) Démontrer que $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 1$.

b) Démontrer que $1 + i$ divise un des trois éléments a, b ou c mais ne peut en diviser qu'un seul.

3° On suppose que $1 + i$ est un diviseur de c .

a) Démontrer que 2 est un diviseur de $(a + ib) \wedge c$.

b) On pose

$$2d = (a + ib) \wedge c; \quad 2ds = a + ib; \quad 2dt = c.$$

Démontrer que

$$s \wedge t = 1; \quad sa = d(s^2 - t^2); \quad isb = d(s^2 + t^2).$$

c) Démontrer que s n'est pas nul et que $\frac{d}{s}$ est égal à $1, -1, i$ ou $-i$.

4° a) Démontrer que l'arête l du G-cube associé à (a, b, c) est un entier supérieur strictement à 1 en le calculant en fonction de s et t .

b) Démontrer que 2 est un diviseur dans G de $|s^2| - s^2$ et de $|t^2| - t^2$.
Démontrer que l est impair.

5° On se donne deux éléments s' et t' non nuls de G tels que

$$s' \wedge t' = 1 \quad \text{et} \quad |s'^2| + |t'^2| \quad \text{soit impair.}$$

Démontrer qu'au triplet $(s'^2 - t'^2, -i(s'^2 + t'^2), 2s't')$ d'éléments de G est associé un G-cube irréductible.

6° a) Existe-t-il des G-cubes irréductibles d'arêtes $3, 5$ et 7 ?

b) Dans chaque cas affirmatif dessiner la projection sur le plan de cote nulle d'un tel G-cube.

7° Démontrer qu'il existe deux G-cubes irréductibles d'arête 9 tels qu'on ne puisse passer de la projection de l'un à la projection de l'autre par une similitude du plan de cote nulle.

8° Démontrer qu'un G-cube est réductible si, et seulement si, il existe une similitude du plan cote nulle, de rapport $\lambda, 0 < \lambda < 1$, qui permet de passer de la projection de ce G-cube à celle d'un autre G-cube.