CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

SESSION 1996

Concours : INTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition : Probabilités - Statistiques
(Coefficient : 2 - Durée : 5 h)

Exercice 1 : Etude d'une loi de probabilité

Soit λ est un réel strictement positif.

Partie A

Soit X la variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si} \quad x \geq 0.$$

La loi de probabilité de X est appelée loi exponentielle de paramètre λ.

1°) Vérifier que f est une densité de probabilité.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X notées respectivement E(X) et V(X).

3°) On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction, notée F, définie sur IR par :

$F(x) = \text{prob}(X \leq x)$. On a également : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

a) Déterminer F(x) en fonction de x et de λ.

b) Dans le cas $\lambda = 1$, construire les courbes représentatives des fonctions f et F dans deux repères orthogonaux distincts.

4°) Déterminer la médiane de X.

5°) On pose $\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^3 f(x)dx$ et on désigne par σ l'écart-type de X. On note γ_1 le coefficient d'asymétrie de la distribution de X ; on rappelle que $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Montrer que $\gamma_1 = 2$.

6°) On note $\text{prob}\left(\{4 \leq X < 5\} \mid \{X > 3\}\right)$ la probabilité que X prenne des valeurs dans l'intervalle $[4 ; 5[$ sachant que X est plus grand que 3.

Calculer cette probabilité lorsque $\lambda = ln3$

7°) Soit t un réel strictement positif. On suppose que la durée, exprimée en minutes, du séjour d'un client dans un magasin donné est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi exponentielle de paramètre λ.

On suppose qu'à l'instant 0 il y a n clients dans le magasin et que durant l'intervalle de temps $[0 ; t]$ aucun client n'entre dans le magasin. Les comportements de ces clients sont supposés indépendants. On note Q_t la variable aléatoire « nombre de client(s) ayant quitté le magasin durant l'intervalle de temps $[0 ; t]$ ».

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Q_t.

b) Application :

Chaque client reste en moyenne 5 minutes dans le magasin. On suppose qu'à l'instant 0 il y a 8 clients dans le magasin. Calculer la probabilité que le magasin soit vide en 10 minutes.

Partie B

Les questions de cette partie sont indépendantes mais certaines nécessitent l'emploi de résultats établis dans la partie A.

1°) Soit n un entier naturel strictement positif. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. on note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Déterminer $E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de λ.

2°) On rappelle que si x désigne un nombre réel, la partie entière de x est l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$. La partie entière de x est notée $[x]$.

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi exponentielle de paramètre λ. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = [X]$, fonction partie entière de X.

a) Montrer que la loi de probabilité de la variable aléatoire Y + 1 est une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

b) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de Y.

3°) Soit Z la variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 1[$. On pose $V = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - Z)$.

Montrer que la loi de probabilité de V est une loi exponentielle dont on précisera le paramètre