Indications pour la première épreuve écrite du CAPES 2006

1 Présentation du jeu

2 Préliminaires d'Analyse

2.1 Equivalent et séries divergentes

1. Par définition de suite équivalente et positivité de x_n, puis sommer.

2. $R_n := \sum_{k=n_0}^{n} x_k \to +\infty$ car $\sum x_k$ est à termes positifs et diverge, donc diverge vers $+\infty$. Donc, à partir d'un certain rang, $n_1 \geq n_0$, $R_n \geq 1$. On peut ainsi diviser l'inégalité de 1. par R_n pour $n \geq n_1$, puis majorer le terme de droite par 2ε pour n assez grand.

2.2 $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) \in [0, +\infty]$

1. (a) $0 \leq v_{n+1} \leq v_n \to 0$: reste d'une série convergente à termes positifs.

   (b) Transformation d'Abel. Comparer avec $\int_0^x tf(t)dt = \int_0^x F(t)dt - xF(x)$ où $F' = f$.

   (c) Résultat classique pour une série à termes positifs décroissants: " Si la série converge alors $nv_n \to 0$.

   Par exemple: $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Comme V_n converge, $V_{2n} - V_n \to 0$. Or $V_{2n} - V_n = v_{n+1} + \cdots + v_{2n} \geq nv_{2n} \geq 0$, donc $2nv_{2n} \to 0$; et pour conclure $0 \leq (2n+1)v_{2n+1} \leq 2nv_{2n} + v_{2n} \to 0$.

   Puisque $nv_n \to 0$, les deux séries convergent et ont même somme grâce á la formule de 1.b.

   (d) $0 \leq nv_n = nu_{n+1} + nu_{n+2} + \cdots \leq (n+1)u_{n+1} + (n+2)u_{n+2} + \cdots \to 0$ comme le reste d'une série convergente.

   (e) Une implication est traitée dans 1.c. Pour la réciproque, $\sum nu_n$ converge implique que $nv_n \to 0$ par 1.d et on conclut à nouveau avec la formule 1.b.

2. $E(X)$ existe donc $\sum nu_n$ converge avec $u_n = P(X = n)$. On conclut par 1.e. puisque $v_n = P(X > n)$.

2.3 Séries entières à termes positifs

Traité en TD

1. f est croissante sur $[0, R[$ comme somme convergente de fonctions croissantes (ou en calculant $f'(x)$).

2. (a) Ici, la somme partielle est plus petite que la somme totale.
   (b) Somme partielle
   (c) TD

3 cas $N = 2$

$D_n =$ " le jeu s'arrête au duel n" $= \{J_1 \neq J_2 \neq \cdots \neq J_{n-1} = J_n\}$

1. (a) $D_2 = \{(0,0),(1,1)\}$
   (b) $D_{n+1} = \{(0,2,\cdots,n-2,n-1,n,n),(1,2,\cdots,n-2,n-1,n,n)\}$

2. $p_n \equiv p$, $p+q=1$ et $n \geq 2$.
   (a) $P(D_n) = 1 \times p^{n-2}q$, $\sum_{n\geq 2} P(D_n) = 1$.
   (b) $T-1 \sim G(q)$ la loi géométrique de paramètre q, donc $E(T-1) = 1/q$, $E(T) = 1+1/q = (2-p)/(1-p)$, $Var(T) = Var(T-1) = p/q^2$.

3. $P(D_n) = p_2 p_3 p_{n-1}(1-p_n) = \beta_{n-1} - \beta_n$
   $P\left(\bigcup_{k=2}^{n} D_k\right) = 1-\beta_n$, donc $P(T<+\infty) = 1 \Longleftrightarrow \beta_n \to 0$.

4. $u_n = \beta_n - \beta_{n+1}$ pour $n \geq 2$, $p_n = 1-n^{-\alpha}$. Comme $\beta_n \to 0$ quand $\sum \ln p_n$ diverge on a:
   $P(T<+\infty) = 1 \Longleftrightarrow \alpha \in]0,1]$.

5. $\alpha = 1$, $P(T=2) = 1\times(1-p_2) = 1/2$, et pour $n \geq 3$, $P(T=n) = 1/(n(n+1))$, ainsi $E(T) = +\infty$ i.e. T n'admet pas d'espérance.

6. $0 < \alpha < 1$
   (a) 2.1.
   (b) monotonie et 2.1.
   (c) $c > 0$, $\ln(n^c u_n) \sim -n^{1-\alpha}/(1-\alpha) + (c-\alpha)\ln u_n$.
   $c = 3$; $n^3 u_n \to 0$ ainsi $\sum n u_n$ converge et comme $nP(T=n) = nu_{n-1}$, T admet une espérance i.e. $E(T) < +\infty$.