

Agrégation interne

Corrigé de la deuxième épreuve

6756 Opérateurs sur un espace fonctionnel et applications.

Solution par J.M. ARNAUDIÈS

Partie I

1. a. Procédons par récurrence sur n . Pour $n = 1$, la formule demandée se réduit aux définitions. Supposons-la vraie à un ordre n ($n \geq 1$). Pour $x \in I$, en combinant la définition de T et l'hypothèse de récurrence, on a (toutes les valeurs en lesquelles on prend f appartenant bien à I) :

$$\begin{aligned} T^{n+1}f(x) &= T(T^n f(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+\frac{1}{2}+k}{2^n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k+1}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+\ell}{2^{n+1}}\right), \end{aligned}$$

764

ce qui démontre la formule voulue au rang $n + 1$. La propriété demandée est donc établie par récurrence à tout rang $n \geq 1$.

- b. Pour $k \in [0, 2^n - 1]$, posons : $\xi = \frac{x+k}{2^n}$. La formule vue en a ci-dessus s'écrit :

$$T^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\xi_k), \quad (1)$$

avec $\xi_k \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ pour tout k . On reconnaît au membre de droite de (1)

la somme de Riemann de f relative à la subdivision $\mathcal{S}_n = \left(\frac{k}{2^n} \right)_{0 \leq k \leq 2^n-1}$ de

Agrégation interne

I . Puisque f est continue, donc Riemann-intégrable, et puisque le pas de \mathcal{S}_n (qui vaut $1/2^n$) tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit, d'après la propriété fondamentale des fonctions Riemann-intégrables de I dans \mathbb{C} :

$$T^n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt. \quad (2)$$

c. Cas de $\lambda = 1$

Il est trivial que $T\bar{1} = \bar{1}$, d'où : $\mathbb{C}\bar{1} \subset E_1$. Réciproquement, soit $f \in E_1$. Alors $T^n f = f$ pour tout n . Mais d'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in I$, on a : $T^n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_f = \int_0^1 f$. Donc $f = C_f \bar{1} \in \mathbb{C}\bar{1}$; il en découle : $E_1 = \mathbb{C}\bar{1}$, ce qu'on devait prouver.

Cas où $|\lambda| \geq 1$ et $\lambda \neq 1$

Soit $f \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Choisissons $x \in I$ tel que $f(x) \neq 0$, et posons : $C_f = \int_0^1 f$. Alors, d'après (2) : $T^n f(x) = \lambda^n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_f$, et par suite, puisque $f(x) \neq 0$; $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{C_f}{f(x)}$. Or cette conclusion est absurde, car dans les conditions imposées à λ , la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune limite (en effet, cette limite, si elle existait, devrait être non nulle puisque $|\lambda| \geq 1$, et ce serait aussi la limite de la suite $(\lambda^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$; d'où facilement : $\lambda = 1$, ce qui est absurde). Donc f ne peut exister, et par suite :

$$E_\lambda = \{0\}. \quad (3) \quad \underline{\underline{765}}$$

2. a. Pour tout $x \in I$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|\lambda^{k-1} \cos(2^k \pi x)| \leq |\lambda|^{k-1};$$

or, la série numérique $\sum_k |\lambda|^{k-1}$ converge, car $|\lambda| < 1$. Donc la série de fonctions continues de x : $\sum_k \lambda^{k-1} \cos(2^k \pi x)$ converge normalement donc uniformément sur I . On en déduit que sa somme g_λ est bien définie et continue sur I . Il est immédiat que $g_\lambda \neq 0$, puisque $g_\lambda(0) = \frac{1}{1-\lambda} \neq 0$.

b. Soit $x \in I$. On a :

$$\begin{aligned}
 Tg_\lambda(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \left(\cos\left(2^k \pi \frac{x}{2}\right) + \cos\left(2^k \pi \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \times 2 \cos\left(\frac{2^k \pi}{4}\right) \cos\left(\frac{2^k \pi x + 2^{k-1} \pi}{2}\right) \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^{k-1} \cos(2^{k-2} \pi) \cos(2^{k-1} \pi x + 2^{k-2} \pi) \\
 &= -\lambda(\cos(2\pi x + \pi)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} \cos(2^{k+1} \pi x) \\
 &= \lambda \cos(2\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} \cos(2^{k+1} \pi x) \\
 &= \lambda \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda^{\ell-1} \cos(2^\ell \pi x) = \lambda g_\lambda(x),
 \end{aligned}$$

et comme $g_\lambda \neq 0$, cela montre que $g_\lambda \in E_\lambda \setminus \{0\}$.

3. a. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Pour tout $k \geq 1$, notons u_k la fonction élément de $\mathcal{C}(I)$ associant $\lambda^{k-1} \cos(2^k \pi x)$ à tout $x \in I$; elle est de classe \mathcal{C}^∞ , sa dérivée u'_k étant donnée par : $x \mapsto -2\pi \times (2\lambda)^{k-1} \sin(2^k \pi x)$. On a donc $|u'_k(x)| \leq 2\pi |2\lambda|^{k-1}$ pour tout k , et pour tout $x \in I$. Puisque $|2\lambda| < 1$, la série numérique $\sum_k |2\lambda|^{k-1}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_k u'_k$ converge normalement donc uniformément sur I . Et comme la série de fonctions $\sum_k u_k$ converge sur I , le théorème usuel de dérivation des séries de fonctions s'applique, et montre que : g_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , sa dérivée étant donnée par $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$. Finalement, on a bien ici : $g_\lambda \in \mathcal{C}^1(I) \setminus \{0\}$.

b. Si $f \in \mathcal{C}^1(I)$, on vérifie immédiatement que :

$$(Tf)' = \frac{1}{2} Tf'. \quad (4)$$

• Valeurs nécessaires de λ telles que $|\lambda| < 1$ et $E_\lambda^1 \neq \{0\}$: fixons un tel λ . Soit $f \in E_\lambda^1 \setminus \{0\}$. Alors $Tf = \lambda f$, d'où $(Tf)' = \lambda f'$, et en appliquant (4) : $Tf' = 2\lambda f'$. On a certainement $f' \neq 0$, car sinon f serait constante, ce qui impliquerait $\lambda = 1$, contrairement à l'hypothèse. D'après le résultat de 1.c ci-dessus, on a donc : soit $2\lambda = 1$, i.e. $\lambda = \frac{1}{2}$; soit $|2\lambda| < 1$, $|\lambda| < \frac{1}{2}$.

Agrégation interne

• Explicitation de $E_{1/2}^1$: on vérifie facilement que la fonction $\psi : I \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x - \frac{1}{2}$ appartient à $E_{1/2}^1 \setminus \{0\}$. Réciproquement, soit $f \in E_{1/2}^1$. On a vu ci-dessus qu'alors $f' \in E_1$, d'où l'existence de $C \in \mathbb{C}$ tel que $f' = C\tilde{1}$. Il existe donc $h \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = Cx + h$ pour tout $x \in I$. En écrivant que $Tf = \frac{1}{2}f$, on voit que $h = -\frac{C}{2}$, d'où $f = C\psi$. En conclusion, on a :

$$E_{1/2}^1 = \mathbb{C}\psi. \quad (5)$$

Partie II

1. a. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, notons $\varphi_k(x) = \frac{2x}{x^2 - k^2}$. Pour tout $k \geq N + 1$ et tout $x \in J_N$, on a :

$$|\varphi_k(x)| \leq \mu_{N,k} = \frac{2N + 1}{k^2 - (N + \frac{1}{2})^2}.$$

La série numérique $\sum_k \mu_{N,k}$ converge, puisque $\mu_{N,k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2N + 1}{k^2}$. Donc la série de fonctions (de x) $\sum_{k \geq N+1} \varphi_k(x)$ converge normalement donc uniformément sur J_N . Il en découle que la série de fonctions de x : $\sum_{k \geq 1} \varphi_k(x)$ converge uniformément sur $J_N \setminus \mathbb{Z}^*$.

b. Les fonctions φ_k sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$. D'après a ci-dessus, la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \varphi_k$ converge uniformément sur toute partie bornée de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$; *a fortiori*, elle converge uniformément sur tout compact $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$. La somme $S = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$. (Notons en passant que la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \varphi_k$ est normale sur tout compact de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.) Comme $S(0) = 0$, on a :

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0, x \neq 0} 0.$$

La fonction :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1}{x} + S(x) \end{cases}$$

est donc continue et vérifie bien :

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} = S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

2. a. Un calcul élémentaire donne :

$$S_m^n(x+1) = \sum_{k=m}^n \frac{1}{x+k+1} = \sum_{\ell=m_1}^{n_1} \frac{1}{x+\ell},$$

avec $m_1 = m + 1, n_1 = n + 1$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(S_m^n \left(\frac{x}{2} \right) + S_m^n \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=m}^n \left(\frac{2}{x+2k} + \frac{2}{x+2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{x+2k} + \frac{1}{x+2k+1} \right) \\ &= S_{m_2}^{n_2}(x), \end{aligned}$$

avec $m_2 = 2m$ et $n_2 = 2m + 1$.

b. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=N} \varphi_k(x) = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+k} = S_{-N}^N(x). \tag{6}$$

Fixons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$, on en déduit que pour toutes suites d'entiers naturels $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ et $(b_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ telles que la suite $(a_\nu - b_\nu)$ soit bornée, on a : $S_{-a_\nu}^{b_\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi(x)$. En tenant compte des résultats de a ci-dessus, on obtient donc :

$$\varphi(x+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{-N}^N(x+1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{-N+1}^{N+1}(x)) = \varphi(x); \tag{7}$$

et :

$$\begin{aligned} T\varphi(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(S_{-N}^N \left(\frac{x}{2} \right) + S_{-N}^N \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{-2N}^{2N+1}(x)) = \varphi(x). \end{aligned} \tag{8}$$

3. a. On sait que la fonction : $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \pi \cotg(\pi z) - \frac{1}{z}$ se prolonge par continuité à l'origine en une fonction développable en série entière autour de l'origine et nulle à l'origine. Puisque $\varphi(x) - \frac{1}{x} = S(x)$, les résultats précédents montrent que δ se prolonge par continuité à l'origine, en une fonction nulle à l'origine.

Mais f est 1-périodique, et d'après (7), φ est 1-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Donc δ se prolonge par continuité sur \mathbb{R} en une fonction $\hat{\delta}$, qui vérifie $\hat{\delta}(0) = 0$, et qui est 1-périodique.

Agrégation interne

b. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (ce qui entraîne $\frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $\frac{x+1}{2} \notin \mathbb{Z}$), posons : $g(x) = \cotg(\pi x)$. Un calcul facile montre que :

$$\frac{1}{2} \left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) = g(x).$$

En tenant compte de (8), on en déduit que δ vérifie :

$$\frac{1}{2} \left(\delta\left(\frac{x}{2}\right) + \delta\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) = \delta(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par continuité en 0 et 1, il en découle que $T\hat{\delta}_I = \hat{\delta}_I$. Donc $\hat{\delta}_I \in Z_1 = \mathbb{C}\bar{1}$ (voir I.1.c), autrement dit, $\hat{\delta}_I$ est constante. Mais comme $\hat{\delta}_I(0) = 0$, la constante est nulle. Donc $\hat{\delta}_I = 0$, et par suite $\varphi(x) = \pi \cotg(\pi x)$ pour $x \in]0, 1[$. Par 1-périodicité, on obtient donc finalement la formule eulérienne bien connue :

$$\pi \cotg(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}). \quad (9)$$

Partie III

1. a. Un raisonnement par récurrence immédiat montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n = \left\{ \frac{x_0 + k}{2^n} \right\}_{0 \leq k \leq 2^n - 1} \quad (10)$$

b. Soit $x \in I$. Munissons I de la distance induite par la métrique usuelle de \mathbb{R} . Il est clair que pour tout n , la distance $d(x, D_n)$ de x à D_n est majorée par $\frac{1}{2^n}$. Donc, $d(x, D_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Il en découle que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ est partout dense dans I .

2. a. Comme I est un intervalle compact de \mathbb{R} , les assertions demandées sont conséquence immédiate des classiques théorèmes de Heine sur les fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle compact de \mathbb{R} .

b. On a $g \circ a(x) \leq g(x) = M$; $g \circ b(x) \leq g(x) = M$. Puisque p et q sont > 0 , l'hypothèse faite entraîne : $g \circ a(x) = g \circ b(x) = M$, c'est-à-dire : $a(x) \in A$ et $b(x) \in A$.

c. Partons d'un x_0 fixé dans A , et associons-lui les ensembles D_n ($n \in \mathbb{N}$) et D définis à la question 1. En utilisant le résultat de **b** ci-dessus, par une récurrence facile, on voit que $D_n \subset A$ pour tout n . Donc, $D \subset A$. La fonction g garde la valeur constante M sur D . Puisque D est dense dans I et puisque g est continue, on en déduit que g est constante sur I .

3. a. Puisque $|\lambda| = 1$ et $Tf = \lambda f$, on a : $|Tf| = g$, d'où, pour $x \in I$:

$$pg(x) + qg(x) = g(x) = |pf \circ a(x) + qf \circ b(x)| \leq pg \circ a(x) + qg \circ b(x),$$

et par suite :

$$p(g \circ a(x) - g(x)) + q(g \circ b(x) - g(x)) \geq 0.$$

Comme $g \in \mathcal{C}(I)$ et comme g est à valeurs réelles, par application de 2.c ci-dessus, on en déduit que g est constante ; remarquons que la constante est non nulle, puisque $f \neq 0$.

b. Comme λf reste $\neq 0$ sur I , pour tout $x \in I$, on a :

$$p \frac{f \circ a(x)}{\lambda f(x)} + q \frac{f \circ b(x)}{\lambda f(x)} = 1.$$

Prenons les parties réelles, et posons :

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{f \circ a(x)}{\lambda f(x)} ; & V(x) &= \frac{f \circ b(x)}{\lambda f(x)} ; \\ u(x) &= \Re(U(x)) ; & v(x) &= \Re(V(x)). \end{aligned}$$

On obtient :

$$pu(x) + qv(x) = 1. \quad (11)$$

Mais $|U(x)| = |V(x)| = 1$, parce que $|\lambda| = 1$ et que g est constante. Donc $|u(x)| \leq 1$ et $|v(x)| \leq 1$. Puisque $p > 0$, $q > 0$, et que $u(x)$ et $v(x)$ sont réels, on déduit de (11) que $u(x) = v(x) = 1$, ce qui implique évidemment : $U(x) = V(x) = 1$. En d'autres termes, $f \circ a(x) = f \circ b(x) = \lambda f(x)$, et cela est vrai pour tout $x \in I$.

c. Cas où $\lambda = 1$

Il est d'abord clair que $\mathbb{C}\bar{1} \subset E_1$. Réciproquement, soit $f \in E_1 \setminus \{0\}$. D'après ce qu'on vient de voir, on a : $f \circ a = f \circ b = f$. Soit $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$; associons-lui les ensembles D_n ($n \in \mathbb{N}$) et D définis en 1 ci-dessus. Par une récurrence immédiate, on voit que quel que soit l'entier n , on a $f(x_0) = f(t)$ pour tout $t \in D_n$. Comme f est continue, le même raisonnement qu'en 2.c ci-dessus montre que f est constante, i.e. : $f \in \mathbb{C}\bar{1}$. En définitive :

$$E_1 = \mathbb{C}\bar{1}. \quad (12)$$

Cas où $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$

Supposons trouvé $f \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Choisissons $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et associons-lui D et les D_n comme ci-dessus. Pour tout entier n , la restriction de f à D_n est constante et vaut $\lambda^n f(x_0)$; choisissons $\xi_n \in D_n$ tel que $|\xi_n - x_0| \leq \frac{1}{2^n}$. La suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 , donc $f(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0)$, puisque f

Agrégation interne

est continue. Comme $f(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\lambda^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, ce qui est absurde (voir question I.1.c). Cette contradiction démontre que :

$$E_\lambda = \{0\}. \quad (13)$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Supposons trouvé $f \in \mathcal{C}(I) \setminus \{0\}$ tel que $Tf = \lambda f$. Alors pour tout entier n , on a : $T^n f = \lambda^n f$. Mais $Tf = pf \circ a + qf \circ b$. Notant M le maximum de $|f|$ sur I , on a donc : $|Tf(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$, d'où aussi : $|T^n f(x)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$. Mais le maximum de $|T^n f|$ sur I est $\mu_n = |\lambda|^n M$; comme $M > 0$, on voit que $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$: on aboutit à une contradiction. Cela prouve que :

$$E_\lambda = \{0\}. \quad (14)$$

Partie IV

Le \mathbb{C} -e.v. $\mathcal{L}(\mathcal{C}(I))$ des endomorphismes continus de $\mathcal{C}(I)$ sera muni de la norme usuelle des applications linéaires continues, qu'on notera $\| \cdot \|$, donnée par $u \mapsto \sup_{f \in \mathcal{C}(I), \|f\| \leq 1} (\|f(x)\|)$. On définit de même la norme des endomorphismes continus du \mathbb{C} -e.v.n. $\mathcal{C}^1(I)$, la norme (toujours notée $\| \cdot \|$) étant celle de la convergence uniforme, *i.e.* celle induite par $\mathcal{C}(I)$. Cette norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{C}^1(I))$ sera encore notée $\| \cdot \|$; si $u \in \mathcal{C}^1(I)$, on a donc : $\|u\| = \sup_{f \in \mathcal{C}^1(I), \|f\| \leq 1} (\|f(x)\|)$. C'est évidemment à ces normes $\| \cdot \|$ que l'énoncé se réfère.

1. Il découle immédiatement de la démonstration faite à la question III.4 que $\|Tf\| \leq \|f\|$ pour toute $f \in \mathcal{C}(I)$; on en déduit que T est continu, et que $\|T\| \leq 1$. De plus, $\|T\bar{1}\| = \|\bar{1}\| = 1$, ce qui permet de préciser : $\|T\| = 1$.
2. a. Le \mathbb{C} -e.v. \mathcal{P} des fonctions polynomiales : $I \rightarrow \mathbb{C}$ est contenu dans $\mathcal{C}^1(I)$. D'après le théorème de Weierstrass, \mathcal{P} est déjà dense dans $\mathcal{C}(I)$; *a fortiori*, $\mathcal{C}^1(I)$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$.
 b. Le sous-espace E_1 est de dimension finie (égale à 1). On sait que tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé (car c'est une partie complète). Donc E_1 est fermé dans $\mathcal{C}(I)$.
3. a. Soit x et y dans I . On a :

$$T^n f(x) - T^n f(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{y+k}{2^n}\right) \right).$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout k , on a :

$$\left| f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{y+k}{2^n}\right) \right| \leq \frac{|x-y|}{2^n} \|f'\|;$$

par addition et inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\begin{aligned} |T^n f(x) - T^n f(y)| &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{|x-y|}{2^n} \|f'\| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \|f'\| = \frac{1}{2^n} \|f'\|, \end{aligned} \quad (15)$$

ce qu'on devait prouver.

b. Pour $u \in \mathcal{C}(I)$, notons ω_u l'oscillation de u , i.e. :

$$\omega_u = \sup_{(x,y) \in I \times I} (|u(x) - u(y)|).$$

Si $x \in I$ et $u \in \mathcal{C}(I)$, on a :

$$\begin{aligned} |Tu(x) - u(x)| &= \left| p \left(u\left(\frac{x}{2}\right) - u(x) \right) + q \left(u\left(\frac{x+1}{2}\right) - u(x) \right) \right| \\ &\leq p\omega_u + q\omega_u = \omega_u; \end{aligned} \quad (16)$$

prenons $u = T^n f$ dans (15); d'après (15), on a alors : $\omega_u \leq \frac{1}{2^n} \|f'\|$, d'où :

$$\|T(T^n f) - T^n f\| \leq \frac{1}{2^n} \|f'\|. \quad (17)$$

c. La série numérique $\sum_n \frac{1}{2^n} \|f'\|$ converge, donc, d'après (17), la série de fonctions continues $\sum_n (T^{n+1} f - T^n f)$ converge normalement donc uniformément sur I . Cela entraîne que la suite de fonctions $(T^n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I , vers une fonction continue sur I . Notons $\Pi_1 f$ la limite des $T^n f$. Ce qu'on vient de voir montre que $\Pi_1 f \in \mathcal{C}(I)$ et que $T^n f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Pi_1 f$ dans $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|)$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (17), on obtient :

$$\begin{aligned} \|T^n f - \Pi_1 f\| &= \left\| \sum_{k=n}^{\infty} (T^k f - T^{k+1} f) \right\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|T^k f - T^{k+1} f\| \\ &\leq \|f'\| \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1} \|f'\|, \end{aligned} \quad (18)$$

ce qui répond à la question.

d. Fixons $n \in \mathbb{N}$. En combinant (15) et (18), on voit facilement que l'oscillation de $\Pi_1 f$ est majorée par :

$$\|f'\|(2^{-n+1} + 2^{-n+1} + 2^{-n}) = 5 \times 2^{-n} \|f'\|.$$

C'est vrai quel que soit n . Comme ce majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit que $\omega_{\Pi_1 f} = 0$. Autrement dit, $\Pi_1 f$ est constante.

4. a. Il est clair que Π_1 est \mathbb{C} -linéaire. D'après ce qu'on vient de voir, l'image de Π_1 est contenue dans $\mathbb{C}\tilde{1} = E_1$. Mais de manière évidente, $\Pi_1 \tilde{1} = \tilde{1}$; par suite, cette image est E_1 . De plus, $E_1 \subset \mathcal{C}^1(I)$; donc Π_1 est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}^1(I)$.

b. Puisque $\|T\| = 1$, on a $\|T^n\| \leq \|T\|^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\|T^n f\| \leq \|f\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{C}^1(I)$. La norme est continue sur $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|)$. Par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient donc :

$$\|\Pi_1 f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|T^n f\|) \leq \|f\|.$$

Cela montre que Π_1 est continu, et que $\|\Pi_1\| \leq 1$. Mais en prenant $f = \tilde{1}$, on a :

$$\|\Pi_1 f\| = \|f\| = 1,$$

d'où l'on déduit que $\|\Pi_1\| = 1$, ce qu'il fallait établir.

5. a. Comme $\mathcal{C}^1(I)$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$, et comme l'endomorphisme Π_1 de $\mathcal{C}^1(I)$ est continu, donc *uniformément* continu, l'existence et l'unicité d'un prolongement à $\mathcal{C}(I)$ de Π_1 en une application continue $\Pi : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ découle du fait (bien connu et vu en cours d'Analyse) que le \mathbb{C} -e.v.n. $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|)$ est complet¹. Par des passages à la limite d'inégalités larges, on voit aisément que Π est \mathbb{C} -linéaire et vérifie $\|\Pi\| = \|\Pi_1\| = 1$.

Notons $\text{Adh}(A)$ l'adhérence dans $\mathcal{C}(I)$ d'une partie A de $\mathcal{C}(I)$. Puisque Π est continue, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi &= \Pi(\text{Adh}(\mathcal{C}^1(I))) \subset \text{Adh}(\Pi(\mathcal{C}^1(I))) \\ &= \text{Adh}(\text{Im}(\Pi_1)) = \text{Adh}(E_1) = E_1, \end{aligned}$$

car E_1 est fermé dans $\mathcal{C}(I)$ (voir **2.b** ci-dessus). Ce qui achève de prouver toutes les assertions demandées.

b. Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. Soit ε un réel > 0 . Choisissons $g \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T^n g - \Pi_1 g\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (application de (18)). Puisque $\|\Pi\| = 1$, on a :

$$\|\Pi f - \Pi g\| = \|\Pi f - \Pi_1 g\| \leq \|\Pi\| \times \|f - g\| \leq \varepsilon.$$

¹ Rappelons la propriété générale suivante : soit deux espaces métriques (X, d) et (X', d') ; soit \mathcal{D} une partie dense de X , et $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Supposons (X', d') complet. Alors φ se prolonge de manière unique en une application continue : $X \rightarrow X'$.

Alors pour $n \geq N$, en écrivant que :

$$T^n f - \Pi f = (T^n f - T^n g) + (T^n g - \Pi_1 g) + (\Pi_1 g - \Pi f),$$

on a :

$$\|T^n f - \Pi g\| \leq \|T^n f - T^n g\| + \|T^n g - \Pi_1 g\| + \|\Pi_1 g - \Pi f\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon;$$

on a donc bien montré que :

$$\|T^n f - \Pi f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (19)$$

c. Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. En remplaçant f par Tf dans (19), on obtient : $\|T^{n+1} f - (\Pi \circ T)f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Mais d'après (19) : $\|T^{n+1} f - \Pi f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Par unicité de la limite dans $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|)$, on en déduit : $(\Pi \circ T)f = \Pi f$. Donc $\Pi \circ T = \Pi$. Par récurrence, il s'ensuit que $\Pi \circ T^k = \Pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\|\Pi\| = 1$, l'endomorphisme $U \mapsto \Pi \circ U$ de $(\mathcal{L}(\mathcal{C}(I)), \|\cdot\|)$ est 1-lipschitzienne, donc continu. Puisque $T^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Pi$, il en découle que $\Pi = \Pi \circ T^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Pi \circ \Pi$. Donc $\Pi \circ \Pi = \Pi$, ce qui prouve que Π est un projecteur dans $\mathcal{C}(I)$. On a déjà vu que $\text{Im}(\Pi) = E_1$, ce qui achève de prouver les assertions demandées.

6. a. D'après les résultats de la partie I, lorsque $p = \frac{1}{2}$, Π n'est autre que le

$$\text{projecteur } f \mapsto \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \tilde{1}.$$

b. Par une récurrence facile, on voit que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'élément $T^n h$ de $\mathcal{C}(I)$ est donné par :

$$x \mapsto T^n h(x) = \frac{x}{2^n} + q \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \quad (x \in I). \quad (20)$$

774

Fixant $x \in I$ dans (20), et passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ en tenant compte de (19), on obtient : $\Pi h(x) = q = 1 - p$. La fonction Πh est donc constante : $\Pi h = (1 - p)\tilde{1}$. On en déduit notamment que : si $p' \in]0, 1[$, $p'' \in]0, 1[$ et $p' \neq p''$, alors les projecteurs Π' et Π'' respectivement correspondants à p' et p'' sont distincts.

Partie V

1. a. Si $x \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} T(g \circ \theta)(x) &= \frac{1}{2} \left[g \circ \theta \left(\frac{x}{2} \right) + g \circ \theta \left(\frac{x+1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[g(x) + g \left(2 \left(\frac{x+1}{2} \right) - 1 \right) \right] = g(x). \end{aligned}$$

Puisque $g(0) = g(1)$, cette relation reste vraie en $x = 1$. Donc $T(g \circ \theta) = g$.

Agrégation interne

b. On a, en décomposant l'intégrale \int_0^1 en $\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$ et en explicitant θ dans chaque intégrale :

$$\langle f \circ \theta, g \rangle = \int_0^1 (f \circ \theta)(x)g(x) dx = I_1 + I_2,$$

avec :

$$I_1 = \int_0^{1/2} (f \circ \theta)(x)g(x) dx = \int_0^{1/2} f(2x)g(x) dx,$$

et :

$$I_2 = \int_{1/2}^1 (f \circ \theta)(x)g(x) dx = \int_{1/2}^1 f(2x-1)g(x) dx.$$

On effectue dans I_1 le changement de variable $u = 2x$, et dans I_2 , le changement de variable $u = 2x - 1$; cela donne :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)g\left(\frac{u}{2}\right) du; \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)g\left(\frac{u+1}{2}\right) du,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle f \circ \theta, g \rangle &= \int_0^1 f(u) \times \frac{1}{2} \left(g\left(\frac{u}{2}\right) + g\left(\frac{u+1}{2}\right) \right) du \\ &= \int_0^1 f(u)Tg(u) du = \langle f, Tg \rangle, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver.

c. Par récurrence, on déduit de ce qui précède que $\langle f \circ \theta^k, g \rangle = \langle f, T^k g \rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par la même méthode de découpage en deux de l'intégrale, on montre facilement que $\langle f \circ \theta, g \circ \theta \rangle = \langle f, g \rangle$, d'où $\langle f \circ \theta^r, g \circ \theta^r \rangle = \langle f, g \rangle$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. En combinant ces deux propriétés, on voit immédiatement que :

$$\langle f \circ \theta^{k+\ell}, g \circ \theta^\ell \rangle = \langle f, T^k g \rangle \tag{21}$$

pour tous naturels k et ℓ .

2. Il n'y a rien à prouver pour $n = 1$. Nous supposons donc $n \geq 2$. Les définitions donnent, en tenant compte de (21) :

$$\begin{aligned} \|M_n f\|_2^2 &= \langle M_n f, M_n f \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k, \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} f \circ \theta^\ell \right\rangle \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \langle f \circ \theta^k, f \circ \theta^k \rangle + 2 \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} \langle f \circ \theta^k, f \circ \theta^\ell \rangle \right) \\ &= \frac{1}{n} \langle f, f \rangle + \frac{2}{n^2} \varepsilon, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \sum_{0 \leq r < s \leq n-1} \langle f \circ \theta^s, f \circ \theta^r \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n-k-1} \langle f \circ \theta^{k+\ell}, f \circ \theta^\ell \rangle \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n-k-1} \langle f, T^k f \rangle \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \langle f, T^k f \rangle
 \end{aligned}$$

d'où en reportant ci-dessus ce dernier résultat :

$$\|M_n f\|_2^2 = \frac{1}{n} \langle f, f \rangle + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \langle f, T^k f \rangle, \quad (22)$$

comme attendu.

3. Fixons l'entier $n \geq 1$. D'après IV.6.a, on a : $\tilde{f} = \Pi f$. Comme \tilde{f} est constante, il est clair que $\tilde{f} = M_n \tilde{f}$; en posant $g = f - \tilde{f}$, on a donc :

$$\|M_n f - \tilde{f}\|_2 = \|M_n g\|_2.$$

Notons que $g \in \mathcal{D}(I) \cap \mathcal{C}^1(I)$. En appliquant (22) à g , on obtient :

$$\|M_n g\|_2^2 = \frac{1}{n} \langle g, g \rangle + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \langle g, T^k g \rangle. \quad (23)$$

Pour tout entier k , on a :

$$T^k g = T^k f - T^k \tilde{f} = T^k f - \tilde{f} = T^k f - \Pi_1 f$$

d'où, d'après (18) :

$$\|T^k g\| \leq 2^{-k+1} \|f'\|.$$

Cela entraîne :

$$|\langle g, T^k g \rangle| \leq a \times 2^{-k+1},$$

avec $a = \|g\| \times \|f'\|$. Par suite :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \langle g, T^k g \rangle \right| &\leq \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k+1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\
 &\leq \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = \frac{4a}{n}.
 \end{aligned}$$

Agrégation interne

En combinant cette majoration avec (23), en utilisant l'inégalité triangulaire et en tenant compte de la majoration évidente $|\langle g, g \rangle| \leq \|g\|^2$, on arrive à :

$$\|M_n g\|_2^2 \leq \frac{b}{n} \quad \text{avec} \quad b = 4a + \|g\|^2. \quad (24)$$

Puisque b ne dépend que de f et non de n , l'inégalité (24) montre que le réel $c = \sqrt{b}$ répond à la question.

Bonnes solutions de D. CLÉNET, R. GARCIN et E. PITÉ.
