$[-1,1] = \{$ Valeurs d'adhérences de $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}\}$

1 Preuve utilisant les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit $y \in [-1,1]$ quelconque, alors il existe $x \in [0,2\pi]$ tel que $\cos(x) = y$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et $N \in \mathbb{N}$ quelconque. On va montrer qu'il existe $n > N$ tel que $|y - \cos(n)| < \varepsilon$, ce qui prouvera bien que y est une valeur d'adhérence de $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci étant valable pour tout $y \in [-1,1]$, on aura bien montré que $[-1,1]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On utilisera le fait que cos est une fonction lipschitsienne de rapport 1.

1. On considère $G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\pi \notin \mathbb{Q}$ on sait que G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. $A = \{g \in G,\ |x - g| < \varepsilon\}$ est un ensemble infini, car tout point de $\mathbb{R}$ est point d'accumulation de G.
3. Soit $g = (n_g + 2k_g\pi) \in A$, comme A est infini, on peut prendre $g \in A$ tel que $|n_g| > N$.

   En effet, sinon on aura qu'un nombre fini de valeurs possibles pour n_g, or A est infini, donc on aurait une infinité de valeurs possibles pour k_g et A serait non borné ce qui est impossible.
4. Soit $g \in A$ avec $|n_g| > N$ alors deux cas se présentent:
   (a) Soit $n_g > 0$ et alors $n = n_g$ convient, i.e. $|y - \cos n_g| < \varepsilon$.
   (b) Soit $n_g < 0$ et alors $n = -n_g$ convient car $\cos(-x) = y$ et $|(-x) - (|n_g| - 2k_g\pi| < \varepsilon$.
5. Remarque: On pourrait aussi démontrer un résultat un peu plus fort: $H = \mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on n'aurait pas à s'inquiéter de la positivité de n_g, et on obtiendrait aussi les valeurs d'adhérences de $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

   Par exemple, soit $\varepsilon > 0$ il existe $g \in G \cap \mathbb{R}^+$ tel que $0 < g < \varepsilon$. Deux cas se présentent:
   (a) Soit $n_g \geq 0$, i.e. $g \in H$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on pourra approcher tous les nombres réels positifs à ε près.
   Pour approcher les $x < 0$ il suffit de remarquer que pour $k > 0$ assez grand $x' = x + 2k\pi > 0$. Donc, il existe $h' \in H$ tel que $|x' - h'| < \varepsilon$. Ainsi $|x - h| < \varepsilon$ avec $h = (h' - 2k\pi) \in H$.
   (b) Soit $n_g < 0$, i.e. $-g \in H$. On fait une preuve similaire en approchant d'abord les nombres réels négatifs.

2 En obtenant les valeurs d'adhérences de $\exp(in)$

C'est une preuve très élégante utilisant le principe des tiroirs de Dirichlet.