Sur la limite de réaction rapide de systèmes de compétition-diffusion en dynamique des populations

Danielle Hilhorst, Sébastien Martin
Université de Paris-Sud 11, Orsay
Masayasu Mimura, Hirokazu Ninomiya
Meiji University, Tokyo

Application des Mathématiques en Sciences du Vivant, 1^{er} octobre 2009

But : Comprendre le comportement spatial et temporel d'espèces en interaction qui peuvent être modélisées par des systèmes de réaction-diffusion

En particulier décrire leurs limites de ségrégation spatiale dans des cas où les habitats des populations deviennent disjoints

Nous revisitons de "vieux problèmes" et prouvons des résultats nouveaux

On considère le système

$$(\mathcal{P}^k)\begin{cases} \partial_t u = d_1 \Delta u + f(u) - kuv, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t v = d_2 \Delta v + g(v) - \alpha kuv, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u = 0, \quad \partial_\nu v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0^k, \quad v(\cdot, 0) = v_0^k, & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où

$f(s) = \lambda s(1-s), g(s) = \mu s(1-s)$;

$k, \alpha, d_1, d_2, \lambda, \mu$ sont des constantes positives ;

$u_0^k, v_0^k \in C(\overline{\Omega}), 0 \le u_0^k, v_0^k \le 1$;

$u_0^k \rightharpoonup u_0, \; v_0^k \rightharpoonup v_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $k \to \infty$.

u, v sont les densités des deux populations biologiques ;

λ, μ sont les taux de compétition intraspécifiques ;

$k, \alpha k$ sont les taux de compétition interspecifiques.

Références

- D. Hilhorst, R. van der Hout, L.A. Peletier, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1996), *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* (1997), *Nonlinear Analysis* (2000).
- R. Eymard, D. Hilhorst, R. van der Hout, L.A. Peletier, *Optimal Control and Partial Differential Equations* (2001).
- E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura, L.A. Peletier, *European J. Appl. Math.* (1999) : The case of Neumann boundary conditions.
- E.C. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura, H. Ninomiya, *Nonlinear Analysis* (2004) : The case of nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions.
- D. Hilhorst, S. Martin, M. Mimura, *Proceedings of the Chiba Conference on Free Boundary Problems* (2008).
- D. Hilhorst, M. Mimura, H. Ninomiya, *Handbook of Differential Equations : Evolutionary Differential Equations* (2009) : Fast reaction limit of competition-diffusion systems.

Il existe une solution classique unique (u^k, v^k) du Problème $(\mathcal{P}^k)$. Elle satisfait

$$0 \leq u^k,\, v^k \leq 1 \;\text{ dans }\; Q_T.$$

Si l'on intègre l'une des équations aux dérivées partielles, on obtient

$$\iint_{Q_T} u^k v^k \leq C(T)/k.$$

On démontre que $\{u^k\}$ et $\{v^k\}$ sont relativement compactes dans $L^2(Q_T)$. Quand $k_n \to \infty$,

$u^{k_n} \to u, v^{k_n} \to v$ p.p. dans Q_T, et $uv = 0$ p.p. dans Q_T.

Le problème limite est un problème à frontière libre. La frontière libre sépare les régions où $\{u > 0, v = 0\}$ et où $\{v > 0, u = 0\}$.

On peut donner à la fois

- une forme faible dans laquelle la frontière libre n'apparaît pas explicitement ;
- une forme forte, avec des conditions explicites à la frontière.

Pour pouvoir passer à la limite, on remarque que la fonction

$$w^k = u^k - \frac{v^k}{\alpha}$$

satisfait une équation où k n'apparaît pas, soit

$$\begin{cases} \partial_t w^k = d_1 \Delta u^k - \dfrac{d_2}{\alpha} \Delta v^k + f(u^k) - \dfrac{g(v^k)}{\alpha} \\ \partial_\nu w^k = 0. \end{cases}$$

On démontre que quand $k \to \infty$,

$$u^k \to w^+, \quad v^k \to \alpha w^-,$$

fortement dans $L^2(Q_T)$, où la fonction w est la solution faible unique du problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t w = \Delta \mathcal{D}(w) + h(w), & \textit{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu w = 0, & \textit{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = w_0 := u_0 - \dfrac{v_0}{\alpha}, & \textit{sur } \Omega, \end{cases}$$

avec $\mathcal{D}(s) := d_1 s^+ - d_2 s^-$ et $h(s) := f(s^+) - g(\alpha s^-)$, où $s^+ = max(s, 0)$ et $s^- = -min(s, 0)$.

On suppose que, à tout temps $t \in [0,T]$, il existe une hypersurface fermée $\Gamma(t)$ et deux sous-domaines $\Omega_u(t)$, $\Omega_v(t)$ tels que

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_u(t)} \cup \overline{\Omega_v(t)}, \quad \Gamma(t) = \overline{\Omega_u(t)} \cap \overline{\Omega_v(t)},$$

$$w(\cdot,t) > 0 \quad \text{on } \Omega_u(t), \qquad w(\cdot,t) < 0 \quad \text{on } \Omega_v(t).$$

On suppose de plus que $t \mapsto \Gamma(t)$ est suffisamment régulière et que $(u,v) := (w^+, \alpha w^-)$ sont régulières jusqu'à $\Gamma(t)$. Alors les fonctions u et v satisfont

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u = d_1 \Delta u + f(u) & \text{dans } \; Q_u := \bigcup \{\Omega_u(t), t \in [0,T]\} \\ \partial_t v = d_2 \Delta v + g(v) & \text{dans } \; Q_v := \bigcup \{\Omega_v(t), t \in [0,T]\} \\ u = v = 0 & \text{on } \Gamma := \bigcup \{\Gamma(t), t \in t \in [0,T]\} \\ d_1 \partial_n u = -\dfrac{d_2}{\alpha} \partial_n v & \text{sur } \; \Gamma \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \; \partial\Omega \times [0,T] \\ + \; \text{ conditions initiales.} & \end{cases}$$

Commentaires sur le problème à frontière libre

Il s'agit d'un problème de Stefan à chaleur latente nulle.

Ceci nous a amené à rechercher un système de réaction-diffusion dont la solution converge vers celle d'un "vrai" problème de Stefan

D. Hilhorst, M. Iida, M. Mimura, H. Ninomiya, *Japan J. Ind. Appl. Math.* (2001)

Dans ce but il nous faut

- Un système à trois composantes,
- avec deux équations aux dérivées partielles couplées à une équation différentielle ordinaire.

Nous considérons le système

$$(\mathcal{Q}^k)\begin{cases} \partial_t u = d_1\Delta u + f(u) - ks_1 uv - k\lambda s_1(1-w)u & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \partial_t v = d_2\Delta v + g(v) - ks_2 uv - k\lambda s_2 wv & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \partial_t w = k(1-w)u - kwv & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u = 0, \quad \partial_\nu v = 0, & \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}^+ \\ u(\cdot,0) = u_0^k, \quad v(\cdot,0) = v_0^k, \quad w(\cdot,0) = w_0^k & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

$u_0^k, v_0^k \in C(\overline{\Omega}),\ w_0^k \in L^\infty(\Omega)$,
$0 \le u_0^k, v_0^k, w_0^k \le 1$;
$u_0^k \rightharpoonup u_0,\ v_0^k \rightharpoonup v_0,\ w_0^k \rightharpoonup w_0$ in $L^2(\Omega)$ as $k\to\infty$.

La fonction w^k approche la fonction caractéristique de l'habitat de la population u^k.

$$(\mathcal{Q})\begin{cases} \partial_t z = \Delta\mathcal{D}(\varphi_\lambda(z)) + h(\varphi_\lambda(z)) \ \text{ dans } \ \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu \mathcal{D}(\varphi_\lambda(z)) = 0 \ \text{ dans } \ \partial\Omega\times\mathbb{R}^+ \\ z(\cdot,0) = \dfrac{u_0}{s_1} - \dfrac{v_0}{s_2} + \lambda w_0 \ \text{ dans } \ \Omega, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{D}(r) := d_1 r^+ - d_2 r^-, \quad h(r) := \frac{f(s_1 r^+)}{s_1} - \frac{g(s_2 r^-)}{s_2}, \quad \varphi_\lambda(r) = (r-\lambda)^+ - r^-.$$

Nous avons maintenant un problème de Stefan avec chaleur latente positive λ. Nous définissons aussi les fonctions limites

$$u = s_1\varphi_\lambda(z^+), \quad v = s_2\varphi_\lambda(z^-), \quad w = \frac{z-\varphi_\lambda(z)}{\lambda}.$$

On montre que $u^k \to u, \quad v^k \to v$ dans $L^2(Q_T)$ quand $k \to \infty$,

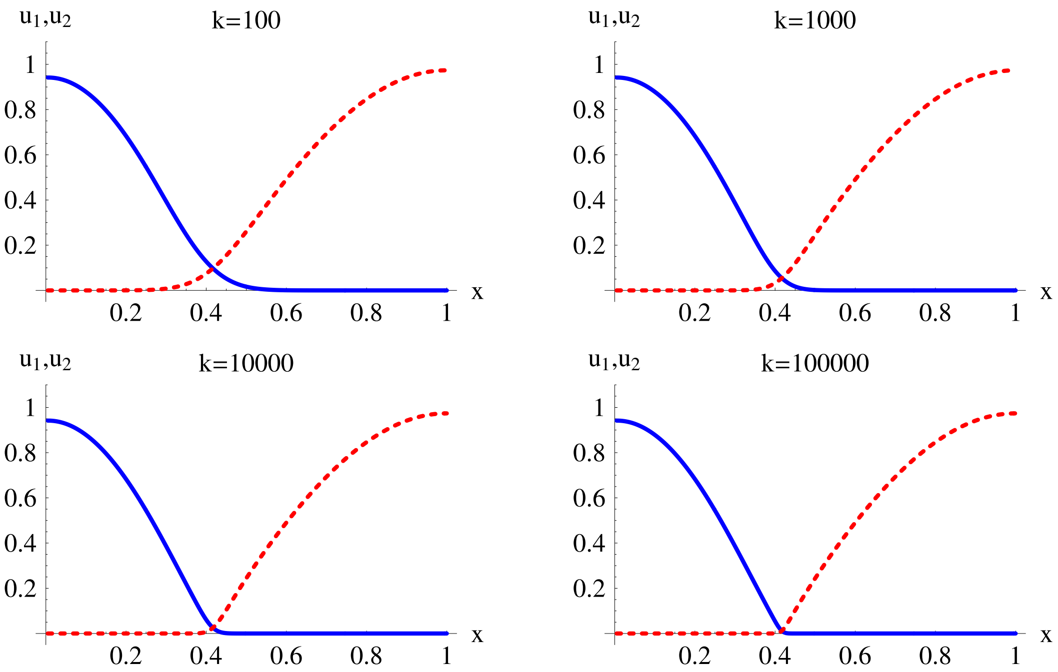
et que

$w^k \rightharpoonup w$ faiblement $L^2(Q_T)$.

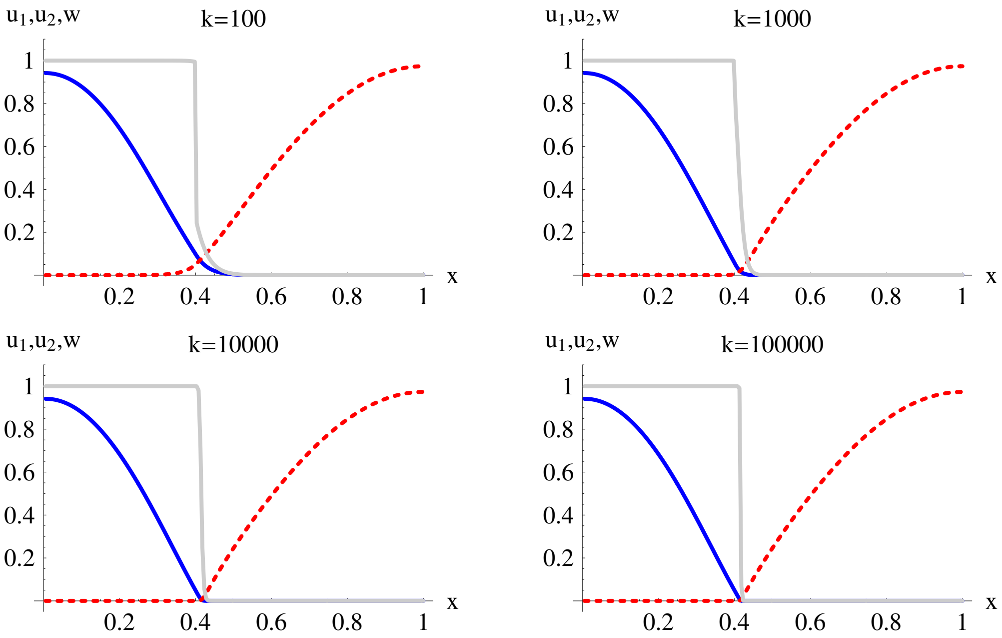
De plus les fonctions u et v satisfont

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u = d_1 \Delta u + f(u) & \text{dans} \quad Q_u := \bigcup \{\Omega_u(t), t \in [0,T]\} \\ \partial_t v = d_2 \Delta v + g(v) & \text{dans} \quad Q_v := \bigcup \{\Omega_v(t), t \in [0,T]\} \\ u = v = 0 & \text{sur } \Gamma := \bigcup \{\Gamma(t), t \in [0,T]\} \\ \lambda V_n = -\dfrac{d_1}{s_1}\partial_n u - \dfrac{d_2}{s_2}\partial_n v & \text{sur} \quad \Gamma \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ + \quad \text{conditions initiales.} & \end{cases}$$

Le système à deux composantes



Le système à trois composantes



Un système à six composantes

On considère le système

$$\left\{\begin{array}{l} u_t^i = d_i \Delta u^i + f_i(u^i) - k \sum_{j\neq i} a_{ij} u^j u^i - k \sum_{j\neq i} w^j u^i \\ \hfill x \in \Omega,\ t > 0,\ i = 1, \cdots, 3, \\ w_t^i = k \sum_{j\neq i} w^j u^i - k \sum_{j\neq i} u^j w^i \\ \hfill x \in \Omega,\ t > 0,\ i = 1, \cdots, 3. \end{array}\right.$$

La solution correspondante présente un grand intérêt puisque les interfaces possèdent des jonctions triples.

Première question

Peut-on montrer que

$w^k \longrightarrow w$ fortement dans $L^2(Q_T)$

quand $k \to \infty$?

C'est-à-dire que, si on a un système où des équations paraboliques sont couplées à une équation différentielle ordinaire, peut-on prouver la convergence forte de la fonction inconnue correspondant à l'équation différentielle ordinaire ?

D. Hilhorst, M. Iida, M. Mimura et H. Ninomiya *DCDS A (2008)*

Deuxième question

Jusqu'à présent, nous avons vu des résultats de convergence.

Peut-on aussi prouver des estimations d'erreur ?

Pour le système à trois composantes ?

Et dans la limite $\lambda \to 0$ pour le système à deux composantes ?

On adapte des démonstrations dues à H. Murakawa.

Si l'on revient au problème $(\mathcal{P}^k)$, nous avons complètement caractérisé la limite (u, v) de (u^k, v^k) quand $k \to \infty$.

Mais qu'en est-il de la limite singulière du terme ku^kv^k quand $k \to \infty$?

On considère à la fois le cas où $d_2 > 0$ et celui où $d_2 = 0$.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec S. Martin et M. Mimura.

Une question similaire a été résolue par D. H., R. van der Hout, M. Mimura et I. Ohnishi en dimension un d'espace dans l'étude du problème de Liesegang où une EDP est couplée avec une EDO.

Idées pour répondre à la première question

L'idée principale est d'appliquer le théorème de Fréchet-Kolmogoroff aux trois composantes u^k, v^k and w^k. Si l'on peut démontrer que les normes L^1 ou L^2 de différences de translatées en espace et en temps de u^k (ou v^k ou w^k) tendent vers zéro uniformément en k quand le paramètre de translation tend vers zéro, alors on en déduira que u^k (ou v^k ou w^k) converge fortement vers sa limite quand $k \to \infty$.

Convergence forte de u^k (ou v^k)

On multiplie l'équation aux dérivées partielles pour u^k par u^k et on intègre par parties pour en déduire l'estimation

$$\iint_{Q_T} |\nabla u^k|^2 \leq C.$$

Estimations sur les différences de translatées en espace et en temps

Pour $r > 0$ petit, soit $r \in (0, \hat{r})$ avec $\hat{r}$ petit, on définit

$$\Omega_r = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; B(x, 2r) \subset \Omega \right\},$$

où $B(x, r)$ dénote la boule dans R^N de centre x et de rayon r.
Différences de translatées spatiales pour u^k (ou v^k). Pour tout $r \in (0, \hat{r})$, il existe une constante positive C telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega_r} (u^k(x+\xi, t) - u^k(x,t))^2 dxdt \leq C|\xi|^2$$

pour tout $\xi \in R^N, |\xi| \leq r$.

Différences de translatées en temps. Il existe une constante positive C_4 telle que

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} (u^k(x, t+\tau) - u^k(x,t))^2 \, dx \, dt \leq C\tau$$

pour tout $\tau \in (0, T)$. Pour la démonstration, on substitue dans les équations aux dérivées partielles.

Différences de translatées en temps. Il existe une constante positive C telle que

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega |w^k(x,t+\tau) - w^k(x,t)|\, dx\, dt \leq C\tau$$

pour tout $\tau \in (0,T)$. Pour la démonstration, on substitue l'équation différentielle ordinaire pour w et on utilise le fait que son membre de droite est borné dans L^1.

C'est beaucoup plus difficile d'obtenir une estimation sur les différences de translatées spatiales puisqu'il nous manque une estimation pour le gradient de w, qui satisfait seulement une équation différentielle ordinaire.

Différences de translatées spatiales.

Propriété de presque-contraction dans L^1

On remarque que

$$(\frac{u^k}{s_1} - \frac{v^k}{s_2} + \lambda w^k)_t = \frac{d_1}{s_1}\Delta u^k - \frac{d_2}{s_2}\Delta v^k + \frac{f(u^k)}{s_1} - \frac{g(v^k)}{s_2}.$$

On pose

$$\mathcal{U}^k = (u^k, v^k, w^k),$$

et on définit

$$||\mathcal{U}^k||_{L^1} = \frac{||u^k||_{L^1}}{s_1} + \frac{||v^k|||_{L^1}}{s_2} + \lambda ||w^k||_{L^1}.$$

Si $f = g = 0$, alors

$$||\mathcal{U}^k(t,\mathcal{U}^k_{01}) - \mathcal{U}^k(t,\mathcal{U}^k_{02})||_{L^1} \leq ||\mathcal{U}^k_{01}) - \mathcal{U}^k_{02})||_{L^1}.$$

Donc

$$||\mathcal{U}^k(x+\xi,t) - \mathcal{U}^k(x,t)||_{L^1(\Omega_r)} \leq ||\mathcal{U}^k_0(x+\xi) - \mathcal{U}^k_0(x)||_{L^1(\Omega_r)},$$

qui tend vers zéro quand $|\xi| \to 0$. De plus, on obtient un résultat similaire en ajoutant les contributions de f et de g.

On définit

$$z^k = \frac{u^k}{s_1} - \frac{v^k}{s_2} + \lambda w^k,$$

$$\theta = d(\varphi_\lambda(z)) = d_1(z-\lambda)^+ - d_2 z^-,$$

$$\theta^k = \frac{d_1}{s_1}u^k - \frac{d_2}{s_2}v^k,$$

où (u^k, v^k, w^k) est solution de (Q^k) et où z est la solution faible de (Q).
On définit aussi les fonctions

$$u := s_1\varphi_\lambda(z)^+ = s_1(z-\lambda)^+, \quad v := s_2\varphi_\lambda(z)^- = s_2 z^-,$$

et on pose

$$z = \frac{u}{s_1} - \frac{v}{s_2} + \lambda w.$$

On remarque que

$$\theta = \frac{d_1}{s_1}u - \frac{d_2}{s_2}v.$$

Les estimations d'erreurs suivantes ont été démontrées par Murakawa.

Théorème. Soit (u^k, v^k, w^k) la solution du Problème $\left(\mathcal{Q}^k\right)$ avec la condition initiale (u_0^k, v_0^k, w_0^k), ou soit (u^k, v^k) la solution du Problème $\left(\mathcal{P}^k\right)$ avec la condition initiale (u_0^k, v_0^k) si $\lambda = 0$. Il existe une constante positive C qui ne dépend pas de λ telle que

$$\|u^k - u\|_{L^2(Q_T)} + \|v^k - v\|_{L^2(Q_T)} + \left\| \int_0^t (\theta^k - \theta) \right\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$$

$$+ \|z^k - z\|_{L^\infty(0,T;(H^1(\Omega))^*)} \leq C\left(k^{-1/2} + \|z_0^k - z_0\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}.$$

Retour au système à deux composantes

On suppose seulement que $d_2 \geq 0$, et l'on considère le Problème $\left(\mathcal{P}^k\right)$:

$$\left(\mathcal{P}^k\right) \begin{cases} \partial_t u = d_1 \Delta u + f(u) - kuv, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t v = d_2 \Delta v + g(v) - \alpha kuv, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u = 0, \quad \partial_\nu v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0^k, \quad v(\cdot, 0) = v_0^k, & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Si $d_2 > 0$ nous avons un système couplé de deux équations paraboliques, tandis qu'une équation parabolique est couplée avec une équation différentielle ordinaire si $d_2 = 0$.

On peut l'écrire sous la forme unifiée :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t w = \Delta \mathcal{D}(w) + h(w), & \textit{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu w = 0, & \textit{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = w_0 := u_0 - \dfrac{v_0}{\alpha}, & \textit{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $\mathcal{D}(s) := d_1 s^+ - d_2 s^-$ et $h(s) := f(s^+) - g(\alpha s^-)$, avec $d_2 > 0$ ou $d_2 = 0$.

La forme forte du problème limite

$$
(\mathcal{P})\begin{cases}
\partial_t u = d_1 \Delta u + f(u) & \text{in } \; Q_u := \bigcup \{\Omega_u(t), t \in [0,T]\} \\
\partial_t v = d_2 \Delta v + g(v) & \text{in } \; Q_v := \bigcup \{\Omega_v(t), t \in [0,T]\} \\
\left[-d_1 u + \dfrac{d_2}{\alpha}\, v\right] = 0, & \text{sur } \Gamma := \bigcup \{\Gamma(t), t \in t \in [0,T]\} \\
\left[-u + \dfrac{v}{\alpha}\right] V_n = \left[d_1 \partial_n u - \dfrac{d_2}{\alpha}\, \partial_n v\right], & \text{sur } \; \Gamma \\
\partial_\nu v = 0 & \text{sur } \; \partial\Omega \times [0,T] \\
+ \;\; \text{conditions initiales,} &
\end{cases}
$$

où $[\cdot]$ dénote le saut au travers de $\Gamma(t)$ de $\Omega_u(t)$ vers $\Omega_v(t)$.

Analysons maintenant la condition de Rankine-Hugoniot $[-u+v/\alpha]\ V_n = \left[d_1\partial_n u - \frac{d_2}{\alpha}\,\partial_n v.\right]$.

- Si $d_2 > 0$, alors la condition de Rankine-Hugoniot se réduit à la condition sur les dérivées normales

  $$\left[d_1\partial_n u - \frac{d_2}{\alpha}\,\partial_n v\right] = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma,$$

  que nous réécrivons sous la forme

  $$d_1\partial_n u|_{\Gamma_u} = -\frac{d_2}{\alpha}\,\partial_n v|_{\Gamma_v};$$

- Si $d_2 = 0$, alors la vitesse de propagation de la frontière libre est donnée par

  $$[v]\ V_n = \alpha\ [d_1\partial_n u] \geq 0,$$

  soit encore

  $$v|_{\Gamma_v} V_n = -\alpha\, d_1\partial_n u|_{\Gamma_u}.$$

Comme

$$\int_{Q_T} u^k v^k \leq C(T)/k,$$

il existe une mesure μ telle que $ku^kv^k \rightharpoonup \mu$ quand $k \to \infty$, au sens de la convergence faible des mesures.

Nous calculons μ seulement dans le cas où le problème limite peut s'écrire sous une forme forte avec une interface régulière. Plus précisément, on démontre le résultat suivant.

Théoreme. *Il existe une mesure μ telle que*

$$k \quad u^k \quad v^k \rightharpoonup \mu, \quad \textit{au sens des mesures.}$$

Si l'interface Γ est régulière, alors μ est localisée sur Γ et est donnée par

$$\mu(x,t) = \frac{1}{1+\alpha}\left([d_1\,\partial_n u + d_2\,\partial_n v] + [v]\;V_n\right)\delta(x-\xi(t)),$$

où la fonction $t \mapsto \xi(t)$ est une paramétrisation de la frontière libre Γ.

REMARQUE. *Une expression alternative pour la mesure μ est donnée par*

$$\mu(x,t) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha}\left[(d_1\partial_n u + d_2\partial_n v)\,(\xi(t),t)\right]\,\delta(x-\xi(t)), & \textit{si } d_2 > 0, \\ \dfrac{1}{\alpha}\left[v(\xi(t),t)\right]\,V_n\,\delta(x-\xi(t)), & \textit{si } d_2 = 0. \end{cases}$$

On définit $\mu^k = k\,F(u^k, v^k)$ et on utilise le fait que $\psi \in C_0^\infty(Q_T)$. Il vient

$$\iint_{Q_T} \mu^k\,\psi = \iint_{Q_T} \Big(u^k\,\partial_t\psi + d_1\,u^k\,\Delta\psi + f(u^k)\psi\Big) = \frac{1}{\alpha}\iint_{Q_T} \Big(v^k\,\partial_t\psi + d_2\,v^k\,\Delta\psi + g(v^k)\psi\Big)\,.$$

C'est pourquoi on obtient, en faisant tendre $k \to \infty$,

$$\iint_{Q_T} \mu\,\psi = \iint_{Q_T} \left(u\,\partial_t\psi + d_1\,u\,\Delta\psi + f(u)\psi\right) = \frac{1}{\alpha}\iint_{Q_T} \left(v\,\partial_t\psi + d_2\,v\,\Delta\psi + g(v)\psi\right),$$

que l'on intègre par parties pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\iint_{Q_T} \mu\,\psi &= \int_0^T \int_{\Omega_u(t)} \underbrace{\left(-\partial_t u + d_1 \Delta u + f(u)\right)}_{=0} \psi + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \underbrace{[u]}_{=0} \left(V_n\,\psi - d_1 \partial_n \psi\right) + [d_1 \partial_n u]\,\psi \\
\alpha \iint_{Q_T} \mu\,\psi &= \int_0^T \int_{\Omega_v(t)} \underbrace{\left(-\partial_t v + d_2\,\Delta v + g(v)\right)}_{=0} \psi + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} [v] V_n\,\psi - \underbrace{d_2 [v]}_{=0}\,\partial_n \psi + [d_2 \partial_n v]\,\psi,
\end{aligned}
$$

d'où finalement

$$
\iint_{Q_T} \mu\,\psi = \frac{1}{1+\alpha} \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left([d_1\,\partial_n u + d_2\,\partial_n v] + [v]\;V_n\right)\,\psi.
$$