

**Exercice 1.** Pour chacune des équations différentielles à variables séparées ci-dessous, trouver la solution maximale pour la condition initiale  $u(t_0) = x_0$ .

- |                                   |                         |
|-----------------------------------|-------------------------|
| (1) $u'(t) \cos(u(t)) = t$        | $t_0 = 0, x_0 = 0$      |
| (2) $u'(t) = \sin(u(t))$          | $t_0 = 0, x_0 = \pi/2$  |
| (3) $u(t)u'(t) + tu^2(t) + t = 0$ | $t_0 = 0, x_0 = 1$      |
| (4) $t^2u'(t) - u^2(t) = 1$       | $t_0 = 1, x_0 = -\pi/4$ |
| (5) $u'(t) = u(t) - 2u^2(t)$      | $t_0 = 0, x_0 = 1$      |
| (6) $u'(t) = tu^3(t)$             | $t_0 = 0, x_0 = 2$      |
| (7) $u'(t) = (t^3 - t)e^{-u(t)}$  | $t_0 = 0, x_0 = 0$      |

**Exercice 2.** Pour chacune des équations de Bernoulli ci-dessous, trouver la solution pour la condition initiale  $u(t_0) = x_0$

- |   |                       |
|---|-----------------------|
| (1) $u'(t) + u(t) = u^3(t)$                   | $t_0 = 0, x_0 = 1$    |
| (2) $u'(t) - \frac{1}{t}u(t) + t^3u^4(t) = 0$ | $t_0 = 1, x_0 = 1$    |
| (3) $u(t)u'(t) - u^2(t) = t^2u^3(t)$          | $t_0 = 0, x_0 = -1/2$ |
| (4) $u'(t) + \frac{1}{t}u(t) = \ln(t)u^2(t)$  | $t_1 = 1, x_0 = 1$    |

**Exercice 3.** (1) Soient  $p, q$  et  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  trois fonctions continues. Montrer que les solutions de l'équation de Riccati

$$u'(t) = p(t)u^2(t) + q(t)u(t) + f(t)$$

se déduisent de l'équation de Bernoulli

$$\tilde{u}(t) - (2p(t)\nu_0(t) + q(t))\tilde{u}(t) = p(t)\tilde{u}^2(t)$$

en posant  $u(t) = \tilde{u}(t) + \nu_0(t)$ , où  $\nu_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est une solution particulière de l'équation de Riccati.

(2) Utiliser la partie (1) pour trouver la solution de l'équation

$$u'(t) = u^2(t) + \frac{1}{t}u(t) - \frac{3}{t^2}$$

qui vérifie la condition initiale  $u(1) = 2$ .

**Exercice 4.** Pour chacune des équations différentielles homogènes ci-dessous, trouver la solution pour la condition initiale  $u(t_0) = x_0$ .

- |   |                        |
|---|------------------------|
| (1) $u'(t) = 2 + \frac{u(t)}{t}$                        | $t_0 = 1, x_0 = 0$     |
| (2) $u^2(t)u'(t) = t^2$                                 | $t_0 = 1, x_0 = -1$    |
| (3) $u(t) + u'(t)(t - u(t)) = 0$                        | $t_0 = 1, x_0 = 1/2$   |
| (4) $tu'(t) = te^{-u(t)/t} + u(t)$                      | $t_0 = 1, x_0 = 0$     |
| (5) $tu'(t) = u(t) + \sqrt{t^2 + u^2(t)}$               | $t_0 = 1, x_0 = 0$     |
| (6) $tu'(t) = u(t) + t \tan\left(\frac{u(t)}{t}\right)$ | $t_0 = 1, x_0 = \pi/6$ |