TD 6 pour le cours d'*Analyse 2* L2 PC et SF-P
Semaine du 12 au 17 octobre 2015
Rappels sur les dérivées et les primitives.

Exercice 1. On définit la suite

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } x_0 = 0.$$

(1) Montrer que cette suite est convergeante.
(2) On définit la fonction auxiliaire

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Trouver une subdivision σ_n d'ordre n de $[0,1]$ qui vérifie $\underline{S}_{\sigma_n}(f) = x_n$.
(3) Utiliser les résultats du cours pour calculer la limite de la suite (x_n) lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2. En utilisant la définition de dérivée, montrer que

(1) Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.
(2) Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
(3) Pour f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ on a que

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

(4) Pour f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ on a que

$$(fg)'(x) = (f'g)(x) + (g'f)(x)$$

Exercice 3. On définit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

(1) Soit $z_n = S_n + \frac{1}{n!}$, montrer que les suites (S_n) et (z_n) sont adjacentes.
(2) À l'aide de l'Exercice 6 (2) de la feuille 2, montrer que

$$e \leq S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

(3) Pour tout $m > 1$, on définit la suite

$$v_n(m) = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{m!}(1 - \frac{1}{n}) \ldots (1 - \frac{m-1}{n}).$$

Montrer que la suite $(v_n(m))$ est croissante et que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(m) = S_m.$$

(4) Remarquer que pour $n \geq m$, $v_n \leq (1 + \frac{1}{n})^n$
(5) Déduire de ce qui précède que $S_m \leq e$ et donc $S = e$, ce qui donne une autre manière d'exprimer e

Exercice 4. (1) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère la série de terme général $x_n = \frac{x}{k!}$. Montrer que cette série est absolument convergeante.

(2) On définit, pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k!}$$

Montrer que $(e^x)' = e^x$

Exercice 5. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

(1) $(x^4 + 2x + 2)(x^5 + 5x^2 + 10x + 1)^{1/4}$
(2) $\frac{x+3}{x+2}$
(3) $\frac{1}{x \ln(x)}$
(4) $\frac{x^3+3x^2+5x+1}{x+2}$
(5) $\frac{e^x}{e^x-1}$
(6) $\frac{1}{e^x-1}$
(7) xe^{x^2}
(8) $x^3 e^{3x^2+1}$
(9) $\frac{\ln(x)}{x}$
(10) $\frac{\sin(x)}{1+cos^2(x)}$
(11) $\frac{1}{1+e^{-x}}$
(12) $\frac{1}{x^2+4}$
(13) $\frac{1}{\cos(x)}$
(14) $\sin^2(x)$
(15) $\cos^2(x)$
(16) $\sin^3(x)$ (on pourra utiliser que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$)
(17) $\sqrt{1-x^2}$ (on pourra faire le changement de variable $x = \sin(y)$)
(18) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$
(19) $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$
(20) $x \sin(x)$
(21) $e^x \cos(x)$