TD 4 pour le cours d'*Analyse 2* L2 PC et SF-P
Semaine du 28 septembre au 2 octobre 2015

Exercice 1. En examinant la limite du terme général x_n, montrer que la série de terme général x_n diverge, pour

(1) $x_n = \sin(n)$
(2) $x_n = 1 + (-1)^n \cos(1/n)$
(3) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
(4) $x_n = \frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$

Exercice 2. En s'aidant des résultats du cours, étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général x_n est défini par:

(1) $x_n = \frac{n}{2n+1}$
(2) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}\sqrt{n+4}}$
(3) $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
(4) $x_n = \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$
(5) $x_n = \frac{n^3}{4^n}$
(6) $x_n = \frac{\sqrt{n^3}}{n^2+1}$
(7) $x_n = \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}}$
(8) $x_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n+1)}{(n+1)!}$

Exercice 3. Utiliser le théorème de comparaison pour établir la convergence des séries dont le terme général x_n est défini par:

(1) $x_n = n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$
(2) $x_n = \sqrt{n+2} \sin\left(\frac{3}{(n+1)^3}\right)$
(3) $x_n = \frac{n^2}{2^n+n}$

Exercice 4. Utiliser le théorème de comparaison pour établir la divergence des séries dont le terme général x_n est défini par:

(1) $x_n = \frac{n+1}{n^2}$
(2) $x_n = n \sin\left(\frac{3}{(n+1)^2}\right)$
(3) $x_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}$
(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(a+1+k)}$ avec $a > 0$
(3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+3}{k(k-1)(k+2)}$
(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$

Exercice 6. Soit (a_n) une suite de nombre réels positifs ou nuls telle que $\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \infty$. Montrer que la série de terme général

$$x_n = \frac{a_n}{1 + a_n}$$

diverge, tandis que la série de terme général

$$x_n = \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$$

converge.

Exercice 7. Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel a et de l'entier relatif p, la convergence et la convergence absolue de la série de terme général

$$x_n = \frac{a^n}{(n+1)^p}.$$

Exercice 8. Discuter, selon les valeurs du nombre réel θ, la convergence et la convergence absolue de la séerie de terme général

$$x_n = \frac{(\sin \theta)^n}{n+1}.$$