TD 3 pour le cours d'*Analyse 2* L2 PC et SF-P
Semaine du 21 au 25 septembre 2015

Exercice 1. Soit (u_n) une suite de réels.

(1) Montrer que si les suites extraites $(u_{3n}), (u_{3n+1})$ et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
(2) Montrer que si les suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.
(3) Montrer que si les suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{n^2}) convergent, alors (u_n) converge.
(4) Montrer par un exemple que les suites extraites $(u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2})$ et (u_{n^2}) peuvent converger sans que (u_n) converge.

Exercice 2. Montrer que les paires de suites (u_n) et (v_n) suivantes sont adjacentes.

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$
(3) $u_0 = a > 0$, $v_0 = b > a$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{2}{1/u_n+1/v_n}$.

Exercice 3. Vérifier les relations de comparaison suivantes et donner les limites.

(1) $\frac{\ln(n)}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$
(2) $\frac{n^2\ln(n)}{2^n} = o(\frac{1}{n^4})$
(3) $\frac{10^n}{n!} = o((3/2)^{-n})$
(4) $10^n = o(\frac{\sqrt{n!}}{(4/3)^n})$
(5) $n^4 2^{n^2} = o((6/5)^{n^3})$
(6) $(\ln(n))^4\sqrt{n} = o(n^2\ln(\ln(n)))$

Exercice 4. Vérifier les relations de comparaison suivantes et donner les limites.

(1) $\frac{\ln(n^2+n)}{n} = O(\frac{\ln(n)}{n})$
(2) $\frac{n^2+\ln(n^2)}{(2n+1)^3} = O(\frac{1}{n})$
(3) $\frac{3}{2^{2n+1}+n^4} = O(4^{-n})$
(4) $\frac{2n+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n+3}} = O(n^{2/3})$
(5) $\ln(n^2+2n+3) = O(\ln(n))$
(6) $\frac{4n^2+3n\cos(n)}{5n-\sin(n+3)} = O(n)$

Exercice 5. Vérifier les relations de comparaison suivantes et donner les limites.

(1) $\frac{4n^3-\sqrt{n^5+3n^4}}{(\sqrt{2}n+\sqrt{n})^4} \sim \frac{1}{n}$
(2) $\frac{\ln(2^{n+\sqrt{n}})}{\ln(2^n\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$
(3) $\frac{\sqrt[3]{n^2+2n\cos(n)}}{\sqrt{n^3+n^2\sin(n)}} \sim n^{-5/6}$

(4) $\frac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}} \sim \sqrt{n}$
(5) $\frac{\ln(2^{n^2+3n})}{\ln(2^{n\sqrt{n}})} \sim \sqrt{n}$
(6) $\frac{\sqrt[3]{n^2+2n\cos(n)}}{\sqrt{n+\sin(n)}} \sim \sqrt[6]{n}$

Exercice 6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x^3}{4}$$

(1) Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -3$, $u_0 = -1, u_0 = 1, u_0 = 3$.
(2) Dt́erminer les points fixes de F.
(3) Montrer que $F([0,2]) \subset [0,2]$ et que $F([-2,0]) \subset [-2,0]$.
(4) Montrer que (u_n) est décroissante, pour tout $u_0 \in]-\infty,-2[\cup]0,2[$, croissante pour tout $u_0 \in]-2,0[\cup]2,+\infty[$.
(5) Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

(1) Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$ et puis $u_0 = 1$.
(2) Montrer que 0 est le seul point fixe de F.
(3) Montrer que $F([0,2]) \subset [0,2]$ et que $F([-2,0]) \subset [-2,0]$.
(4) On suppose que $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers 0.
(5) On suppose que $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est décroissante et tend vers 0.