

Exercice 1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = x^n$$

converge uniformément vers 0 sur tout intervalle du type $[0, a]$ avec $0 < a < 1$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = n^a x e^{-nx}$$

avec $a \in \mathbf{R}^+$. Montrer que cette suite converge simplement en chaque point de \mathbf{R}^+ , et qu'elle diverge ailleurs. Pour quelles valeurs de a cette suite converge-t-elle uniformément sur \mathbf{R}^+ ?

Exercice 3. Montrer que la série de terme général $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ est normalement convergente sur \mathbf{R}^+ .

Indication: On pourra montrer que $f_n(x) \leq e^{-n}$ sur \mathbf{R}^+ .

Exercice 4. Soit $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. On note $R_n(x)$ le n -ième reste de la série pour laquelle on n'a gardé que les termes en sinus:

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx).$$

Calculer $2R_n(x) \sin(x/2)$, et en déduire la convergence simple de cette série sur tout intervalle fermé ne contenant aucun point de $2\pi\mathbf{Z}$. En déduire la nature de la série trigonométrique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Exercice 5. Soit k un entier relatif et $I(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt$. On a

$$I(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Exercice 6. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$.