

TD 1 pour le cours d'Analyse 2 L2 PC et SF-P
Semaine du 7 au 11 septembre 2015

Remarque. Ce sont les problèmes d'examens, TD et de test du cours d'Analyse 1 des années précédentes. L'étudiant qui aura des difficultés avec ces notions devra réviser son cours de l'année précédente.

Exercice 1. Donner le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \ln(1 - e^x).$$

La fonction f est elle croissante sur son domaine de définition, ou décroissante, ou ni l'un ni l'autre? Esquissez l'allure du graphe de f .

Exercice 2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes

- (1) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- (2) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$
- (3) $f(x) = \frac{2+x+x^2}{1+x+2x^2}$

Exercice 3. Sur quel(s) intervalle(s) de \mathbf{R} l'application

$$f(x) = (x + 1)^3 - 1$$

admet elle une réciproque g ? Donner une expression (algébrique) de g sur son domaine de définition. Donner l'allure du graphe de g sur l'intervalle $[-2, 7]$.

Exercice 4. Calculer $\int_{-1}^1 (x + 1)(x^2 - 1)dx$.

Exercice 5. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

Exercice 6. Montrer que $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$. Commencer par faire le cas $n = 2$.

Exercice 7. Résoudre

$$4 \cosh(x) + 3 \sinh(x) - 4 = 0.$$

Exercice 8. Calculer

- (1) $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3}))$
- (2) $\arccos(\cos(-\frac{2\pi}{3}))$
- (3) $\arccos(\cos(4\pi))$
- (4) $\arcsin(\cos(\frac{2\pi}{3}))$
- (5) $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4}))$
- (6) $\arcsin(\sin(8))$

Exercice 9. Expliciter

- (1) $\sin(\arcsin(x))$
- (2) $\cos(\arcsin(x))$
- (3) $\sin(\arctan(x))$

Dessiner le graphe de $\arcsin(\sin(x))$.

Exercice 10. Donner une primitive de

$$f(x) = \frac{dx}{2 + \cos(x)}.$$

Indication: Poser $t = \tan(\frac{x}{2})$ et utiliser que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Exercice 11. Calculer les intégrales:

- (1) $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) dx$
- (2) $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$
- (3) $\int_0^1 \frac{1+e^x}{(2+3e^x)(1+e^{-x})} dx$ *Indication: Poser $t = e^x$.*

Exercice 12. Soit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } x \neq 2.$$

Peut-on prolonger f par continuité en 2?

Exercice 13. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application f est-elle dérivable en 0?

Exercice 14. Calculer les limites suivantes:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2})$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{a \ln(x)} - e^{x \ln(a)}}{\cos(x) - \cos(a)}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \right)$