Corrigé du devoir sur table A

Exercice 1. (2 pts) *Une suite* (u_n) *est dite* **convergeante** *vers une limite* l *si quel que soit* $\epsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a*

$$|u_n - l| < \epsilon.$$

Exercice 2. (3 pts)

(1) $x_n = n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{1}{n^2} n^3 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{1}{n^2}$. *La série de terme général* $\frac{1}{n^2}$ *est convergeante par un argument vu en cours, que je rappelle ici:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

la suite des sommes partielles étant croissante et bornée, elle est convergeante.

(2) $x_n = \sqrt{n+2} \sin\left(\frac{3}{(n+1)^3}\right) = \frac{3\sqrt{n+2}}{(n+1)^3} \frac{(n+1)^3}{3} \sin\left(\frac{3}{(n+1)^3}\right) \leq \frac{3\sqrt{n+2}}{(n+1)^3}$. *Or pour* n *grand,*

$$\frac{3\sqrt{n+2}}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

et on vient de voir que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ *est convergeante.*

(3) $x_n = \frac{n^2}{2^n+n} \leq \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{\sqrt{2}^n} \frac{1}{\sqrt{2}^n}$. *Pour* n *grand, comme* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2}^n} = 0$*, on aura que* $x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}^n}$*. Or on a vu que une série de terme général* a^n *avec* $a < 1$ *est convergeante car*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} \to \frac{1}{1-a}(n \to \infty).$$

Exercice 3. (3 pts)

(1) $u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$: Soit $\epsilon > 0$, comme $u_n > 1$ il suffit de montrer que $u_n < 1 + \epsilon$ pour n suffisament grand, ce qui revient à demander que $\frac{1}{\epsilon} < \frac{n+1}{\sqrt{n}}$. Pour cela, il suffit que $\frac{1}{\epsilon} < \sqrt{n}$, soit $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. P. ex pour $\epsilon = 1/100$, à partir du rang $n_0 = 10000$ on aura que tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$.

(2) $u_n = \frac{2n+3}{2n+1}$: Soit $\epsilon > 0$, comme $u_n > 1$ il suffit de montrer que $u_n < 1 + \epsilon$ pour n suffisament grand. Or $\frac{2n+3}{2n+1} < \frac{2n+3}{2n} = 1 + \frac{3}{n}$ et donc pour $n > \frac{\epsilon}{3}$ on aura $u_n < 1 + \epsilon$. En particulier, pour $\epsilon = 1/100$, à partir du rang $n_0 \geq 34$ on aura que tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$.

(3) $u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}$: Soit $\epsilon > 0$, comme $-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$, pour $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ on aura que $1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \epsilon$. Donc pour $\epsilon = 1/100$, à partir du rang $n_0 \geq 99$ on aura que tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$.