

Problème de Kashiwara-Vergne et associateurs de Drinfeld

François Rouvière

Nice, 19 avril 2012

Le but de l'exposé est d'expliquer le théorème suivant, où $\text{ch}(\cdot, \cdot)$ désigne la série de Campbell-Hausdorff, et de donner un aperçu de sa démonstration à l'aide des associateurs de Drinfeld.

Théorème 1 (Alekseev et Torossian 2008) *Il existe $F \in T\text{Aut}_2$ vérifiant (AT1) et (AT2) :*

$$F(\text{ch}(X, Y)) = X + Y \quad (\text{AT1})$$

$$\delta J(F) = 0. \quad (\text{AT2})$$

On verra au passage que ce théorème permet de résoudre la conjecture de Kashiwara-Vergne :

Conjecture 2 (Kashiwara et Vergne 1978) *Pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} (réelle et de dimension finie) il existe $A(X, Y)$ et $B(X, Y)$, séries de crochets de $X, Y \in \mathfrak{g}$ convergentes dans un voisinage de l'origine, vérifiant (KV1) et (KV2) :*

$$\text{ch}(Y, X) = X + Y - (1 - e^{-\text{ad } X}) A(X, Y) - (e^{\text{ad } Y} - 1) B(X, Y) \quad (\text{KV1})$$

$$\text{tr}(\text{ad } X \circ \partial_X A + \text{ad } Y \circ \partial_Y B) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\text{ad } X}{e^{\text{ad } X} - 1} + \frac{\text{ad } Y}{e^{\text{ad } Y} - 1} - \frac{\text{ad } Z}{e^{\text{ad } Z} - 1} - 1 \right) \quad (\text{KV2})$$

avec $Z = \text{ch}(X, Y) = \log(\exp X \exp Y)$ (traces d'endomorphismes de \mathfrak{g}).

Dans toute la suite on considère un corps \mathbb{K} de caractéristique nulle et on note $\mathfrak{l}_n = \mathfrak{l}(X_1, \dots, X_n)$ l'algèbre de Lie libre à n générateurs X_1, \dots, X_n sur \mathbb{K} , complétée grâce au degré (en attribuant le degré 1 à chaque X_i). Ses éléments sont les séries (à coefficients dans \mathbb{K}) de crochets des générateurs.

L'algèbre enveloppante \mathcal{A}_n de \mathfrak{l}_n est l'algèbre associative libre à n générateurs X_1, \dots, X_n , complétée grâce au degré. Ses éléments sont les séries (à coefficients dans \mathbb{K}) de produits non commutatifs des générateurs. Par exemple, si pour $X \in \mathfrak{l}_2$ on note $\exp X = \sum_0^\infty X^k/k! \in \mathcal{A}_2$, la série de Campbell-Hausdorff $\text{ch}(X, Y) = \log(\exp X \exp Y)$ définit un élément de \mathcal{A}_2 qui appartient en fait à \mathfrak{l}_2 , d'après la formule de Dynkin :

$$\text{ch}(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots$$

1 Dérivations et automorphismes tangentiels

Le but de ce paragraphe est d'expliquer l'équivalence entre (KV1) et (AT1).

Définition 3 *Une dérivation D de \mathfrak{l}_n (qui est déterminée par ses valeurs DX_i sur les générateurs) est dite **dérivation tangentielle** si, pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $A_i \in \mathfrak{l}_n$ tel que $DX_i = [X_i, A_i]$.*

La donnée des A_i détermine entièrement D . S'ils sont égaux à un même A , D se réduit simplement à la dérivation adjointe $D = -\text{ad } A$.

Les dérivations tangentielles forment une algèbre de Lie notée \mathfrak{td}_n : si $DX_i = [X_i, A_i]$ et $D'X_i = [X_i, A'_i]$ on a en effet

$$DD'X_i = D[X_i, A'_i] = [X_i, DA'_i] + [[X_i, A_i], A'_i]$$

d'où, par l'identité de Jacobi,

$$(DD' - D'D)X_i = [X_i, A''_i] \text{ avec } A''_i = DA'_i - D'A_i + [A_i, A'_i].$$

La graduation naturelle de l'algèbre \mathfrak{l}_n donne une graduation de \mathfrak{td}_n , et les composantes de degré donné sont de dimension finie.

Plus généralement, si $\mathfrak{g} = \prod_{k \geq 1} \mathfrak{g}_k$ est une algèbre de Lie graduée, avec $\dim \mathfrak{g}_k$ finie pour tout k , on peut lui associer un groupe G : comme ensemble c'est \mathfrak{g} , muni du produit défini par la formule de Campbell-Hausdorff. Si on note $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application qui identifie \mathfrak{g} et G , le produit de G s'écrit $\exp A \exp B = \exp \text{ch}(A, B)$. L'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{td}_n$ conduit ainsi au groupe $G = \text{TAut}_n$ des **automorphismes tangentiels** de \mathfrak{l}_n . C'est le groupe des automorphismes g de l'algèbre de Lie \mathfrak{l}_n tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $g_i \in \exp \mathfrak{l}_n$ (disons $g_i = \exp A_i$) tel que $gX_i = \text{Ad } g_i(X_i) = e^{\text{ad } A_i} X_i$.

Pour $n = 2$ on notera X, Y au lieu de X_1, X_2 les générateurs de \mathfrak{l}_2 , et A, B au lieu de A_1, A_2 des éléments de \mathfrak{l}_2 . La proposition suivante relie l'équation classique (KV1) de Kashiwara-Vergne aux dérivations et automorphismes tangentiels. On note $\text{ch}_t(X, Y) = t^{-1} \text{ch}(tX, tY)$ pour $t \in \mathbb{K}$, $t \neq 0$, et $\text{ch}_0(X, Y) = X + Y$.

Proposition 4 Pour $A, B \in \mathfrak{l}_2$ et $t \neq 0$ soient $A_t = t^{-1}A(tX, tY)$, $B_t = t^{-1}B(tX, tY)$ et $D_t \in \mathfrak{td}_2$ la dérivation tangentielle définie par $D_t X = [X, A_t]$, $D_t Y = [Y, B_t]$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{ch}(Y, X) = X + Y - (1 - e^{-\text{ad } X}) A(X, Y) - (e^{\text{ad } Y} - 1) B(X, Y)$ (KV1).
- (ii) On a

$$\frac{d}{dt} \text{ch}_t(X, Y) = D_t(\text{ch}_t(X, Y)).$$

- (iii) La solution $F_t \in \text{TAut}_2$ de l'équation différentielle

$$F_t^{-1} \frac{dF_t}{dt} = -D_t$$

avec la condition initiale $F_0 = \text{Id}$ vérifie l'équation

$$F_t(\text{ch}_t(X, Y)) = X + Y.$$

Preuve. (ii) \Leftrightarrow (iii). L'égalité $F_t^{-1} (dF_t/dt) = -D_t$ entraîne

$$F_t^{-1} \frac{d}{dt} (F_t(\text{ch}_t(X, Y))) = \frac{d}{dt} \text{ch}_t(X, Y) - D_t(\text{ch}_t(X, Y))$$

donc (ii) équivaut à la constance de $F_t(\text{ch}_t(X, Y))$ comme série formelle en t , nécessairement égale à $X + Y$ comme on le voit pour $t = 0$.

(i) \Leftrightarrow (ii). D'après un calcul déjà effectué (pour $t = 1$) dans l'exposé précédent¹, l'égalité (i) équivaut à

$$\begin{aligned} \partial_t \text{ch}_t(X, Y) &= \partial_X \text{ch}_t(X, Y)[X, A_t] + \partial_Y \text{ch}_t(X, Y)[Y, B_t] \\ &= \partial_X \text{ch}_t(X, Y)D_t X + \partial_Y \text{ch}_t(X, Y)D_t Y = D_t \text{ch}_t(X, Y) \end{aligned}$$

puisque D_t agit par dérivation sur la série de Lie ch_t , d'où le résultat. ■

Remarque. Dans l'exposé précédent (où il est noté Φ_t) l'automorphisme tangentiel F_t est donné par $F_t(X) = \text{Ad } a_t(X)$, $F_t(Y) = \text{Ad } b_t(Y)$ où a_t et b_t s'obtiennent à partir de A_t et B_t en résolvant un système différentiel.

¹<http://math.unice.fr/~frou/recherche/KV12.pdf>

2 Divergence et cocycle jacobien

Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment (AT1) et (AT2) entraînent (presque) (KV2).

2.1 Divergence

Tout élément a de l'algèbre associative \mathcal{A}_n admet une décomposition unique de la forme

$$a = a^{(0)}1 + \sum_{k=1}^n a^{(k)}X_k$$

où $a^{(0)} = \varepsilon(a) \in \mathbb{K}$ est donné par la counité et $a^{(k)} \in \mathcal{A}_n$. Par exemple $a = [X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$ donne $a^{(1)} = -X_2$, $a^{(2)} = X_1$ et tous les autres $a^{(k)}$ sont nuls. Dans le cas particulier où $a \in \mathfrak{l}_n$ on peut montrer généralement que, pour tout $V \in \mathfrak{l}_n$,

$$\left(\text{ad } a^{(k)} \right) V = \frac{d}{dt} a(X_1, \dots, X_k + tV, \dots, X_n) \Big|_{t=0},$$

ce qu'on abrège en

$$\text{ad } a^{(k)} = \partial_k a(X_1, \dots, X_n). \quad (1)$$

L'application $\text{ad} : \mathfrak{l}_n \rightarrow \text{End}(\mathfrak{l}_n)$ est ici étendue en un morphisme d'algèbres associatives $\mathcal{A}_n \rightarrow \text{End}(\mathfrak{l}_n)$; par exemple $\text{ad}(X_i X_j X_k) V = [X_i, [X_j, [X_k, V]]]$. Les $a^{(k)}$ jouent ainsi le rôle de "dérivées partielles" de a .

Par ailleurs on note $a \mapsto \langle a \rangle$ la projection canonique : $\mathcal{A}_n \rightarrow \langle \mathcal{A}_n \rangle = \mathcal{A}_n / [\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n]$, où $[\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n]$ est le sous-espace vectoriel de \mathcal{A}_n engendré par les commutateurs; on a donc $\langle ab \rangle = \langle ba \rangle$ pour tous $a, b \in \mathcal{A}_n$ (comme on aurait avec une application trace).

Une dérivation $D \in \mathfrak{td}_n$ (définie par $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{l}_n$) est nulle si et seulement si $DX_i = [X_i, A_i] = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, ce qui équivaut à $A_i \in \mathbb{K}X_i$ pour tout i . En supposant que A_i ne contient pas de terme proportionnel à X_i (ce que nous ferons désormais) on a donc une correspondance bijective entre dérivations tangentielles D et n -uplets (A_1, \dots, A_n) .

Définition 5 On définit la **divergence** d'une dérivation tangentielle $D = (A_1, \dots, A_n) \in \mathfrak{td}_n$ par

$$\text{div } D = \left\langle \sum_{k=1}^n A_k^{(k)} X_k \right\rangle \in \langle \mathcal{A}_n \rangle.$$

Cette application $\text{div} : \mathfrak{td}_n \rightarrow \langle \mathcal{A}_n \rangle$ est ainsi nommée à cause d'une certaine analogie entre ses propriétés et celles de la divergence d'un champ de vecteurs.

Toute dérivation D de l'algèbre de Lie \mathfrak{l}_n s'étend naturellement en une dérivation de l'algèbre associative \mathcal{A}_n , et passe au quotient sur $\langle \mathcal{A}_n \rangle$. On note $D \cdot \langle a \rangle$ cette action.

Proposition 6 La divergence est un 1-cocycle sur \mathfrak{td}_n , i.e.

$$\text{div}[D, D'] = D \cdot \text{div}(D') - D' \cdot \text{div}(D).$$

pour tous $D, D' \in \mathfrak{td}_n$.

Preuve. La vérification est un peu fastidieuse, mais sans difficulté. Voir [2] Proposition 3.6.

2.2 Jacobien

On peut alors "intégrer" la divergence d'une dérivation tangentielle en le **cocycle jacobien** d'un automorphisme tangentiel. En définissant l'action $g \cdot \langle a \rangle$ de $g \in TAut_n$ sur $\langle a \rangle \in \langle \mathcal{A}_n \rangle$ par $g \cdot \langle a \rangle = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{n!} \langle D^k a \rangle$ si $g = \exp D$, on a le résultat suivant.

Proposition 7 *Il existe une unique application $J : TAut_n \rightarrow \langle \mathcal{A}_n \rangle$ telle que, pour tout $D \in \mathfrak{td}_n$,*

$$\frac{d}{dt} J(\exp tD)|_{t=0} = \text{div } D$$

et, pour tous $g, h \in TAut_n$,

$$J(gh) = J(g) + g \cdot J(h).$$

En particulier $J(Id) = 0$ et $J(g^{-1}) = -g^{-1} \cdot J(g)$.

Preuve. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{td}_n \oplus \langle \mathcal{A}_n \rangle$ la somme semi-directe de l'algèbre de Lie des dérivations tangentielles et de l'espace $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ considéré comme algèbre de Lie abélienne, avec l'action de \mathfrak{td}_n sur $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ déjà citée. D'après la propriété de cocycle de div , l'application $D \mapsto D + \text{div } D$ est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{td}_n dans \mathfrak{g} :

$$[D + \text{div } D, D' + \text{div } D'] = [D, D'] + D \cdot \text{div } D' - D' \cdot \text{div } D = [D, D'] + \text{div}[D, D'].$$

Par suite l'application $g = \exp D \mapsto \exp(D + \text{div } D)$ est un morphisme de groupes et on vérifie facilement qu'on obtient les propriétés voulues en définissant $J(g)$ par

$$(\exp J(g))g = \exp(D + \text{div } D) \text{ si } g = \exp D.$$

En appliquant la formule de Campbell-Hausdorff à $\exp(D + \text{div } D)\exp(-D)$ cela s'écrit encore

$$J(\exp D) = \frac{e^D - 1}{D} \cdot \text{div } D. \blacksquare$$

2.3 Cohomologie

Soit $a = a(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}_n$. On définit un opérateur $\delta : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ par

$$\begin{aligned} \delta a(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \\ &= a(X_2, \dots, X_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i a(X_1, \dots, X_i + X_{i+1}, \dots, X_{n+1}) + (-1)^{n+1} a(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $a \in \mathcal{A}_1$, $\delta a(X, Y) = a(Y) - a(X + Y) + a(X)$.

Et pour $a \in \mathcal{A}_2$, $\delta a(X, Y, Z) = a(Y, Z) - a(X + Y, Z) + a(X, Y + Z) - a(X, Y)$.

On vérifie que $\delta^2 = 0$. De plus δ passe au quotient en un opérateur $\delta : \langle \mathcal{A}_n \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}_{n+1} \rangle$.

Théorème 8 *Le deuxième groupe de cohomologie $H^2(\langle \mathcal{A} \rangle, \delta)$ est nul : l'équation $\delta a = 0$ avec $a \in \langle \mathcal{A}_2 \rangle$ entraîne l'existence de $b \in \langle \mathcal{A}_1 \rangle$ tel que $a = \delta b$.*

Preuve. Voir [2] Theorem 2.1.

L'équation (AT2) $\delta J(F) = 0$ avec $F \in TAut_2$ entraîne donc l'existence de $f \in \langle \mathcal{A}_1 \rangle$ (série formelle en une variable) telle que $J(F) = \langle f(X) - f(X + Y) + f(Y) \rangle$. On va en déduire une expression de $\text{div } D$ lorsque $F = F_1$ est l'automorphisme tangentiel de la Proposition 4 et $D = (A, B)$ la dérivation tangentielle associée (on omet les indices t lorsque $t = 1$).

En dérivant par rapport à s la relation de cocycle $J(F_t^{-1}F_s) = J(F_t^{-1}) + F_t^{-1} \cdot J(F_s)$ on obtient, pour $s = t$,

$$\text{div} \left(F_t^{-1} \frac{dF_t}{dt} \right) = F_t^{-1} \cdot \frac{d}{dt} (J(F_t))$$

puisque div est la différentielle de J à l'élément neutre (Proposition 7). D'après la Proposition 4(iii) le premier membre est $-\text{div } D_t$ d'où, pour $t = 1$,

$$\text{div } D = -F^{-1} \cdot \frac{d}{dt} J(F_t)|_{t=1}.$$

Soit Λ_t l'automorphisme de l'algèbre libre \mathfrak{l}_2 défini par $\Lambda_t X = tX$, $\Lambda_t Y = tY$. L'examen du comportement des données sous le changement d'échelle Λ_t conduit à $F_t = \Lambda_t F \Lambda_t^{-1}$, $J(F_t) = \Lambda_t J(F)$. Il en résulte que, avec $\varphi \in \langle \mathcal{A}_1 \rangle$ lié à f par $\varphi(X) = -X f'(X)$,

$$\text{div } D = F^{-1} \cdot \langle \varphi(X) - \varphi(X + Y) + \varphi(Y) \rangle$$

(voir [2] §5.2 et 5.3 pour plus de détails). Or F^{-1} est un automorphisme tangentiel d'où $F^{-1} \cdot \langle \varphi(X) \rangle = \langle \varphi(X) \rangle$ et de même avec Y , et F^{-1} transforme $X + Y$ en $\text{ch}(X, Y)$ d'après (AT1) d'où $F^{-1} \cdot \langle \varphi(X + Y) \rangle = \langle \varphi(\text{ch } X, Y) \rangle$. En résumé, (AT1) et (AT2) entraînent l'existence d'une série formelle à une variable $\varphi \in \langle \mathcal{A}_1 \rangle$ telle que

$$\text{div } D = \text{div}(A, B) = \langle \varphi(X) - \varphi(\text{ch}(X, Y)) + \varphi(Y) \rangle. \quad (2)$$

2.4 KV2 enfin

D'après (2) et la définition de la divergence, en notant $A = A_X X + A_Y Y$ et $B = B_X X + B_Y Y$ les décompositions de $A, B \in \mathfrak{l}_2$ dans l'algèbre enveloppante \mathcal{A}_2 , on a

$$\text{div}(A, B) = \langle A_X X + B_Y Y \rangle = \langle \varphi(X) - \varphi(\text{ch}(X, Y)) + \varphi(Y) \rangle.$$

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{K} , A et B définissent deux séries formelles sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui vérifient (KV1). De plus, en appliquant la représentation adjointe ad (étendue à l'algèbre enveloppante comme expliqué en 2.1), cette égalité modulo des crochets entraîne l'égalité de traces

$$\text{tr}(\text{ad } A_X \circ \text{ad } X + \text{ad } B_Y \circ \text{ad } Y) = \text{tr}(\varphi(\text{ad } X) + \varphi(\text{ad } Y) - \varphi(\text{ad } \text{ch}(X, Y))),$$

soit encore

$$\text{tr}(\text{ad } X \circ \partial_X A + \text{ad } Y \circ \partial_Y B) = \text{tr}(\varphi(\text{ad } X) + \varphi(\text{ad } Y) - \varphi(\text{ad } \text{ch}(X, Y)))$$

compte tenu de (1). Enfin un calcul par identification de séries (qu'il serait trop long de reproduire ici, voir [2] Proposition 5.6) montre que (KV1) et cette équation déterminent entièrement la partie paire $\varphi_+(x) = (\varphi(x) + \varphi(-x))/2$ de φ , à savoir

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - 1 \right).$$

3 Pentagone

On note X, Y (resp. X, Y, Z) les générateurs de l'algèbre libre \mathfrak{l}_2 (resp. \mathfrak{l}_3).

Proposition 9 *Soit $F \in T\text{Aut}_2$ vérifiant (AT1) et (AT2), i.e. $F(\text{ch}(X, Y)) = X + Y$ et $J(F) = \langle f(X) - f(X + Y) + f(Y) \rangle$ pour une certaine série formelle f en une variable. On définit Φ par*

$$\Phi = F_{12,3} F_{1,2} F_{2,3}^{-1} F_{1,23}^{-1}. \quad (3)$$

Alors

(i) $\Phi \in KV_3$, i.e. $\Phi \in T\text{Aut}_3$, $\Phi(X + Y + Z) = X + Y + Z$ et $J(\Phi) = 0$.

(ii) Φ vérifie la relation du pentagone, i.e.

$$\Phi_{12,3,4} \Phi_{1,2,34} = \Phi_{1,2,3} \Phi_{1,23,4} \Phi_{2,3,4}. \quad (4)$$

Preuve. (i) Comme $F^{-1}(X + Y) = \text{ch}(X, Y)$ on a successivement

$$\begin{aligned} F_{1,23}^{-1}(X + Y + Z) &= \text{ch}(X, Y + Z) \\ F_{2,3}^{-1} \text{ch}(X, Y + Z) &= \text{ch}(X, \text{ch}(Y, Z)) = \text{ch}(\text{ch}(X, Y), Z) \\ F_{1,2} \text{ch}(\text{ch}(X, Y), Z) &= \text{ch}(X + Y, Z) \\ F_{12,3} \text{ch}(X + Y, Z) &= X + Y + Z, \end{aligned}$$

d'où $\Phi(X + Y + Z) = X + Y + Z$. La clef du résultat est donc l'associativité du produit de Campbell-Hausdorff.

D'autre part, la propriété de cocycle de J (Proposition 7) appliquée à l'égalité

$$F_{1,2}^{-1} F_{12,3}^{-1} \Phi = F_{2,3}^{-1} F_{1,23}^{-1}$$

donne

$$J(F_{1,2}^{-1}) + F_{1,2}^{-1} \cdot J(F_{12,3}^{-1}) + F_{1,2}^{-1} F_{12,3}^{-1} \cdot J(\Phi) = J(F_{2,3}^{-1}) + F_{2,3}^{-1} \cdot J(F_{1,23}^{-1}). \quad (5)$$

Comme $J(F) = \langle f(X) - f(X + Y) + f(Y) \rangle$ on a au membre de gauche

$$\begin{aligned} J(F_{1,2}^{-1}) + F_{1,2}^{-1} \cdot J(F_{12,3}^{-1}) &= \langle f(X) - f(\text{ch}(X, Y)) + f(Y) \rangle + F_{1,2}^{-1} \cdot \langle f(X + Y) - f(\text{ch}(X + Y, Z)) + f(Z) \rangle \\ &= \langle f(X) + f(Y) + f(Z) - f(\text{ch}(\text{ch}(X, Y), Z)) \rangle \end{aligned}$$

et à droite

$$\begin{aligned} J(F_{2,3}^{-1}) + F_{2,3}^{-1} \cdot J(F_{1,23}^{-1}) &= \langle f(Y) - f(\text{ch}(Y, Z)) + f(Z) \rangle + F_{2,3}^{-1} \cdot \langle f(X) - f(\text{ch}(X, Y + Z)) + f(Y + Z) \rangle \\ &= \langle f(X) + f(Y) + f(Z) - f(\text{ch}(X, \text{ch}(Y, Z))) \rangle. \end{aligned}$$

Ici encore l'associativité permet de conclure $J(\Phi) = 0$.

(ii) La relation du pentagone se vérifie en y reportant la définition de Φ , compte tenu de (i) qui entraîne que $\Phi_{1,2,3}$ commute à $F_{123,4}$ et $\Phi_{2,3,4}$ à $F_{1,234}$. ■

Le théorème suivant est une réciproque partielle de la Proposition 9, en ajoutant une condition technique $c(\varphi_2) = 1/8$ (où $c(\varphi_2)$ est la somme des coefficients des termes de degré 2 dans $\varphi = \sum_1^\infty \varphi_k \in \mathfrak{td}_3$ défini par $\Phi = \exp \varphi$).

Théorème 10 Soit $\Phi \in KV_3$ vérifiant l'équation du pentagone et $c(\varphi_2) = 1/8$. Il existe alors $F \in TAut_2$, lié à Φ par (3) et solution de (AT1) et (AT2).

Preuve (aperçu). On cherche F sous la forme $F = \exp f$ avec $f = \sum_1^\infty f_k$ avec $f_k \in \mathfrak{td}_2$ homogène de degré k . L'identification de $F_{12,3} F_{1,2} F_{2,3}^{-1} F_{1,23}^{-1}$ avec $\Phi = \exp \varphi$ se fait degré par degré : on peut imposer $f_1 = -\frac{1}{2}(Y, 0)$, la condition $c(\varphi_2) = 1/8$ permet ensuite d'obtenir f_2 et on poursuit par récurrence. Le premier terme f_1 ayant été ainsi choisi, la solution F est unique.

On peut donc écrire $F^{-1} = \exp D \exp(-f_1)$ où $D \in \mathfrak{td}_2$ ne contient que des termes de degré ≥ 2 . Comme $f_1 X = \frac{1}{2}[X, Y]$ et $f_1 Y = 0$ on a $F^{-1}(X + Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots$ où les \dots sont des termes de degré ≥ 3 . Notons $\chi(X, Y) = F^{-1}(X + Y) \in \mathfrak{t}_2$. Par hypothèse Φ conserve $X + Y + Z$, ce qui s'écrit

$$F_{2,3}^{-1} F_{1,23}^{-1}(X + Y + Z) = F_{1,2}^{-1} F_{12,3}^{-1}(X + Y + Z)$$

c'est-à-dire $\chi(X, \chi(Y, Z)) = \chi(\chi(X, Y), Z)$. Or on peut montrer que cette associativité, jointe à un développement de la forme $\chi(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots$, caractérise la série de Campbell-Hausdorff. Par suite $\chi(X, Y) = F^{-1}(X + Y) = \text{ch}(X, Y)$ ce qui établit (AT1).

La preuve de (AT2) s'obtient en introduisant l'hypothèse $J(\Phi) = 0$ dans l'égalité de jacobiens (5). Voir [2] Proposition 7.4 et Theorem 7.1 pour plus de détails. ■

4 Une symétrie, deux hexagones et un associateur

Nous introduisons maintenant une involution τ sur l'ensemble des solutions F de (AT1)(AT2). On note $r = (Y, 0) \in \mathfrak{td}_2$ et $t = (Y, X) \in \mathfrak{td}_2$. Les dérivations de \mathfrak{l}_2 définies par ces éléments sont donc $r = -\text{ad } Y$, $t = -\text{ad}(X + Y)$.

Proposition 11 *Pour $F \in T\text{Aut}_2$ on note*

$$\tau(F) = \exp(t/2) \circ F_{2,1} \circ \exp(-r).$$

Alors τ définit une involution sur l'ensemble des solutions de (AT1)(AT2).

Cette involution (notée σ_2 dans l'exposé précédent) apparaît déjà dans l'article original de Kashiwara et Vergne.

Preuve. D'abord $\exp(-r) \text{ch}(X, Y) = e^{\text{ad } Y} \text{ch}(X, Y) = \text{ch}(Y, X)$. Si $F(\text{ch}(X, Y)) = X + Y$ on a donc

$$\tau(F)(\text{ch}(X, Y)) = \exp(t/2)(X + Y) = X + Y.$$

De plus l'égalité $\delta J(F) = 0$ équivaut à l'existence d'une série formelle f en une variable telle que $J(F) = \langle f(X) - f(X + Y) + f(Y) \rangle$ (Théorème 8). La propriété de cocycle (Proposition 7) donne

$$\begin{aligned} J(\tau(F)) &= J(\exp(t/2) \circ F_{2,1} \circ \exp(-r)) \\ &= J(\exp(t/2)) + \exp(t/2) \cdot J(F_{2,1}) + \exp(t/2) \circ F_{2,1} \cdot J(\exp(-r)). \end{aligned}$$

Comme $\text{div } t = \text{div } r = 0$, ceci se réduit à

$$\begin{aligned} J(\tau(F)) &= \exp(t/2) \cdot J(F_{2,1}) = \exp(t/2) \cdot \langle f(X) - f(X + Y) + f(Y) \rangle \\ &= \langle f(X) - f(X + Y) + f(Y) \rangle = J(F). \end{aligned}$$

Donc τ préserve les propriétés (AT1) et (AT2). Enfin, si F vérifie (AT1),

$$\begin{aligned} \tau^2(F) &= \exp(t/2) \circ \tau(F_{2,1}) \circ \exp(-r) = \exp(t/2) \circ \exp(t/2) \circ F \circ \exp \text{ad } X \circ \exp \text{ad } Y \\ &= \exp(-\text{ad}(X + Y)) \circ F \circ \exp \text{ad } \text{ch}(X, Y) = F, \end{aligned}$$

car $F(\text{ch}(X, Y)) = X + Y$ donne $F \circ \text{ad } \text{ch}(X, Y) \circ F^{-1} = \text{ad}(X + Y)$. ■

Dans l'énoncé suivant apparaissent les dérivations $t_{1,2} = (Y, X, 0)$, $t_{2,3} = (0, Z, Y)$, $t_{1,3} = (Z, 0, X)$, éléments de \mathfrak{td}_3 qui engendrent l'algèbre de Lie \mathfrak{t}_3 des "tresses infinitésimales". Chaque $t_{i,j}$ est formé de X_j à la i -ème place, X_i à la j -ème, et 0 ailleurs. On note T_3 le groupe correspondant ; c'est un sous-groupe du groupe KV_3 défini dans la Proposition 9, car $t_{i,j}(X + Y + Z) = 0$ et $\text{div } t_{i,j} = 0$.

Proposition 12 *Soient F une solution τ -invariante de (AT1)(AT2) et $\Phi \in KV_3$ donné par (3). Alors Φ vérifie la relation du pentagone, la relation d'inversion*

$$\Phi_{3,2,1} = (\Phi_{1,2,3})^{-1} \tag{6}$$

et les deux relations d'hexagone

$$\Phi_{2,1,3} \exp(t_{1,3}/2) (\Phi_{2,3,1})^{-1} \exp(t_{2,3}/2) \Phi_{3,2,1} = \exp((t_{1,3} + t_{2,3})/2) \tag{7}$$

$$(\Phi_{1,3,2})^{-1} \exp(t_{1,3}/2) \Phi_{3,1,2} \exp(t_{1,2}/2) (\Phi_{3,2,1})^{-1} = \exp((t_{1,2} + t_{1,3})/2). \tag{8}$$

Noter que la seconde relation d'hexagone se déduit de la première, en échangeant 1 et 3 et utilisant la relation d'inversion. La relation du pentagone a déjà été établie à la Proposition 9.

Preuve. Voir [2] Propositions 8.5 et 8.8.

Un calcul facile sur les termes de degré 2 de φ (avec $\Phi = \exp \varphi$) montre que la première relation d'hexagone entraîne $c(\varphi_2) = 1/8$. D'après le Théorème 10, tout élément Φ de KV_3 vérifiant pentagone et hexagone donnera donc une solution de notre problème.

Définition 13 On appelle **associateur** tout élément Φ du groupe KV_3 qui vérifie les relations (4)(6)(7)(8) de pentagone, d'inversion et d'hexagone. Il est dit **associateur de Drinfeld** s'il appartient au sous-groupe T_3 de KV_3 .

Théorème 14 Il existe des associateurs de Drinfeld.

Ce théorème a été démontré par Drinfeld (1991) en exhibant l'associateur Φ_{KZ} donné par la monodromie de l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov.

Corollaire 15 Le problème (AT1)(AT2) admet des solutions F telles que $\tau(F) = F$.

Preuve. Cela résulte du Théorème 10, compte tenu de la remarque sur $c(\varphi_2) = 1/8$. La τ -invariance du F obtenu est une conséquence de la relation d'inversion (6) vérifiée par Φ ([2], Proposition 9.2). ■

5 Compléments

Faute de place, de temps (et de compétence du rédacteur), deux aspects importants du problème n'ont pu être abordés ici.

1. L'ensemble des solutions de (AT1)(AT2) est muni de l'action d'un groupe noté \widehat{KV}_2 . Cette action est libre et *transitive* ([2], Theorem 5.1). Il est conjecturé que ce groupe est le produit du groupe de Grothendieck-Teichmüller par la droite $\mathbb{K}t$. En faisant agir \widehat{KV}_2 on peut modifier la partie impaire de la fonction φ considérée en 2.4 ci-dessus de manière à obtenir $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{e^x - 1} - 1 \right)$, en accord exact avec l'équation (KV2) ([2] Proposition 6.2).
2. Ces notes sont entièrement tirées de [2]. L'article [1] qui lui fait suite donne une forme précise aux résultats, en explicitant un F issu de l'associateur Φ_{KZ} (cf. Théorème 10 et Corollaire 15). Ce travail s'appuie sur une étude approfondie des groupes de tresses. Prenant enfin \mathbb{C} puis \mathbb{R} pour corps de base, les auteurs établissent la convergence des séries obtenues (séries formelles jusque-là), ce qui donne enfin une preuve complète de la conjecture de Kashiwara-Vergne.

Références

- [1] ALEKSEEV, A., ENRIQUEZ, B. and TOROSSIAN, C., *Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations*, Publ. Math. I.H.E.S. 112 (2010), 143-189; [arXiv :0903.4067](#).
- [2] ALEKSEEV, A. and TOROSSIAN, C., *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators*, Ann. of Maths. 175 (2012), 415-463; [arXiv :0802.4300](#).