La "conjecture" de Kashiwara-Vergne

François Rouvière

Nice, 12 avril 2012

$$\log\left(\mathbf{e}^{\mathbf{Y}}\mathbf{e}^{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{X}+\mathbf{Y}-\left(\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\operatorname{ad}\mathbf{X}}\right)\mathbf{A}(\mathbf{X},\mathbf{Y})-\left(\mathbf{e}^{\operatorname{ad}\mathbf{Y}}-\mathbf{1}\right)\mathbf{B}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$
$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}\mathbf{X}\circ\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{A}+\operatorname{ad}\mathbf{Y}\circ\partial_{\mathbf{Y}}\mathbf{B}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\operatorname{ad}\mathbf{X}}{\mathbf{e}^{\operatorname{ad}\mathbf{X}}-\mathbf{1}}+\frac{\operatorname{ad}\mathbf{Y}}{\mathbf{e}^{\operatorname{ad}\mathbf{Y}}-\mathbf{1}}-\frac{\operatorname{ad}\mathbf{Z}}{\mathbf{e}^{\operatorname{ad}\mathbf{Z}}-\mathbf{1}}-\mathbf{1}\right)$$

1 L'isomorphisme de Duflo

Pour motiver ces étranges équations de Kashiwara-Vergne, commençons par un bref rappel sur l'isomorphisme de Duflo. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (réelle et de dimension finie). On note $\operatorname{ad} : X \mapsto \operatorname{ad} X$ sa *représentation adjointe*, définie par $\operatorname{ad} X(Y) = [X,Y]$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$. C'est un morphisme de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$, muni du crochet déduit de sa structure d'algèbre associative : $\operatorname{ad}[X,X'] = \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} X' - \operatorname{ad} X' \circ \operatorname{ad} X$ (identité de Jacobi). Cette même identité dit aussi que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} X$ est une *dérivation* de $\mathfrak{g}$: $\operatorname{ad} X([Y,Z]) = [\operatorname{ad} X(Y), Z] + [X, \operatorname{ad} Y(Z)]$. On peut l'étendre en une dérivation de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ (selon le relation de Leibniz), d'où la sous-algèbre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ des éléments invariants (i.e. annulés par $\operatorname{ad} X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$). Par ailleurs $\operatorname{ad} X$ s'étend en une dérivation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, selon $\operatorname{ad} X(A) = XA - AX$ pour tout $A \in U(\mathfrak{g})$, d'où la sous-algèbre $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ des éléments annulés par les $\operatorname{ad} X$, qui s'identifie au centre de $U(\mathfrak{g})$.

La *symétrisation* $\beta : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ définie par $\beta(X_1 \cdots X_n) = \frac{1}{n!}\sum_\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}$ pour tous $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}$ (produits dans $S(\mathfrak{g})$ au premier membre, dans $U(\mathfrak{g})$ au second, et somme sur le groupe symétrique de n éléments) est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Elle commute aux $\operatorname{ad} X$, et sa restriction aux invariants donne un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sur $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Mais ce n'est pas en général un isomorphisme d'algèbres (bien que ces deux dernières soient commutatives). On peut cependant, en modifiant la symétrisation, obtenir un isomorphisme d'algèbres $\gamma : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (*isomorphisme de Duflo*). La première construction de γ par Duflo (1971), purement algébrique, utilisait de nombreux outils de la théorie des représentations des algèbres de Lie. En 1977 il parvient à la relier à l'analyse de la façon suivante (voir l'exposé de synthèse [5]).

Soit G un groupe de Lie (connexe et simplement connexe) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de l'élément neutre. Sa différentielle en $X \in \mathfrak{g}$ et son déterminant jacobien sont

$$D_X \exp = D_e L_{\exp X} \circ \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\ ,\ j(X) = \det\left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\right) \tag{1}$$

où L_g désigne la translation à gauche $x \mapsto gx$ dans G ; cela peut s'obtenir en isolant les termes de degré un en Y dans la formule de Campbell-Hausdorff pour $\log\left(e^X e^Y\right)$.

L'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ s'identifie canoniquement à l'algèbre des polynômes sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$, ou encore à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$: ainsi l'élément $P \in S(\mathfrak{g})$ s'identifie au polynôme $P(\xi)$ (où ξ est la variable dans $\mathfrak{g}^*$) ou à l'opérateur différentiel $P\left(\partial_X\right)$, liés par

$$P(\partial_X)\left(e^{<\xi,X>}\right) = P(\xi)e^{<\xi,X>}.$$

De même une série formelle $F \in S[[\mathfrak{g}^*]]$ s'identifie à l'opérateur différentiel (d'ordre infini) $F\left(\partial_\xi\right)$ sur $\mathfrak{g}^*$. Avec ces notations l'isomorphisme de Duflo s'écrit, pour $P \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$,

$$P \longmapsto \gamma(P) = \beta\left(j^{1/2}(\partial_\xi)P(\xi)\right) \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

Enfin l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ s'identifie canoniquement à l'algèbre des opérateurs différentiels sur le groupe G qui commutent aux translations à gauche, et son centre $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ à la sous-algèbre des opérateurs qui commutent aux translations à gauche et à droite de G (*opérateurs bi-invariants*). On vérifie que $\gamma(P)$ s'explicite, comme opérateur différentiel sur le groupe, par

$$\gamma(P)\varphi(g) = P\left(\partial_X\right)\left(j^{1/2}(X)\varphi(g\exp X)\right)\Big|_{X=0} \tag{2}$$

pour toute fonction φ sur G et tout $g \in G$. Il devient alors raisonnable d'espérer que le résultat de Duflo : $\gamma(PQ) = \gamma(P)\gamma(Q)$ pour $P, Q \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ admette une preuve directe "simple", basée uniquement sur les propriétés formelles de l'application exponentielle...

2 La "conjecture"

2.1 Un problème général

L'égalité $\gamma(PQ) = \gamma(P)\gamma(Q)$ traduit l'isomorphisme entre une composition d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{g}$ (le produit PQ au premier membre) et celle d'opérateurs différentiels sur le groupe G (le produit $\gamma(P)\gamma(Q)$ au second membre). On va plus généralement s'intéresser à un transfert de convolution entre $\mathfrak{g}$ et G via l'application exponentielle. Rappelons que le produit de convolution de deux distributions u, v sur $\mathfrak{g}$, appliqué à une fonction test f, est défini par

$$\langle u *_{\mathfrak{g}} v, f\rangle = \langle u(X) \otimes v(Y), f(X+Y)\rangle$$

et celui de deux distributions U, V sur G, appliqué à φ, par

$$\langle U *_G V, \varphi\rangle = \langle U(g) \otimes V(h), \varphi(gh)\rangle.$$

En se limitant à un voisinage de l'origine sur lequel exp est un difféomorphisme, on définit les transferts $f \mapsto \widetilde{f}$ d'une fonction et $u \mapsto \widetilde{u}$ d'une distribution sur $\mathfrak{g}$ par

$$f(X) = j^{1/2}(X)\ \widetilde{f}(\exp X)\ ,\ \langle \widetilde{u}, \widetilde{f}\rangle = \langle u, f\rangle.$$

Rappelons enfin qu'une fonction f sur $\mathfrak{g}$ est G-invariante si $f(g \cdot X) = f(X)$ (action adjointe du groupe sur son algèbre de Lie) et, par dualité, une distribution u sur $\mathfrak{g}$ est G-invariante si $\langle u(X), f(g\cdot X)\rangle = \langle u(X), f(X)\rangle$ pour toute fonction test f et tout $g \in G$.

Problème 1 *Établir l'égalité*

$$(u *_{\mathfrak{g}} v)\widetilde{\ } = \widetilde{u} *_G \widetilde{v} \tag{3}$$

pour toutes distributions G-invariantes u, v sur $\mathfrak{g}$ (à supports convenables).

L'hypothèse de G-invariance est essentielle : sans elle, le produit $\widetilde{u} *_G \widetilde{v}$ n'est pas en général commutatif, contrairement à $u *_{\mathfrak{g}} v$. On vérifie que l'égalité (3) généralise l'isomorphisme de Duflo, car les distributions de support l'origine correspondent à des opérateurs différentiels (appliqués à la mesure de Dirac), et leur convolution à la composition de ces opérateurs.

2.2 La première équation de Kashiwara-Vergne

Appliqué à une fonction test $\widetilde{f}$, le premier membre de (3) est

$$\langle (u *_{\mathfrak{g}} v)\widetilde{\ }, \widetilde{f}\rangle = \langle u *_{\mathfrak{g}} v, f\rangle = \langle u(X) \otimes v(Y), f(X+Y)\rangle.$$

Le second est, d'après les définitions,

$$\langle \widetilde{u} *_G \widetilde{v}, \widetilde{f}\rangle = \langle \widetilde{u}(g), \langle \widetilde{v}(h), \widetilde{f}(gh)\rangle\rangle = \langle \widetilde{u}(g), \widetilde{\varphi}(g)\rangle = \langle u, \varphi\rangle$$

en notant $\widetilde{\varphi}(g) = \langle \widetilde{v}(h), \widetilde{f}(gh)\rangle$, i.e. $\varphi(X) = j^{1/2}(X)\langle \widetilde{v}(h), \widetilde{f}(\exp X \cdot h)\rangle$.

De même $\widetilde{f}(\exp X \cdot h) = \widetilde{\psi}(h)$ avec $\psi(Y) = j^{1/2}(Y)\widetilde{f}(\exp X \cdot \exp Y)$, et c'est ici qu'intervient

$$Z(X,Y) = \log(\exp X \cdot \exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] - \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}(Y,[X,Y]] + \cdots$$

(*formule de Campbell-Hausdorff*) qui traduit la loi de G dans la carte exponentielle. Il vient ainsi $\varphi(X) = j^{1/2}(X)\langle v, \psi\rangle$ avec

$$\psi(Y) = j^{1/2}(Y)\widetilde{f}(\exp Z(X,Y)) = \left(\frac{j(Y)}{j(Z(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z(X,Y))$$

et finalement

$$\langle \widetilde{u} *_G \widetilde{v}, \widetilde{f}\rangle = \left\langle u(X) \otimes v(Y), \left(\frac{j(X)j(Y)}{j(Z(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z(X,Y))\right\rangle.$$

L'égalité (3) équivaut donc à

$$\langle u(X) \otimes v(Y), f(X+Y)\rangle = \left\langle u(X) \otimes v(Y), \left(\frac{j(X)j(Y)}{j(Z(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z(X,Y))\right\rangle. \qquad (4)$$

L'idée de Kashiwara et Vergne est de démontrer (4) *par déformation.* Soit $\mathfrak{g}_t$ l'algèbre de Lie obtenue en munissant l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ du crochet $[X,Y]_t = t[X,Y]$ où t est un paramètre réel. L'analogue de Z pour cette structure est

$$Z_t(X,Y) = t^{-1}Z(tX,tY) = X + Y + \frac{t}{2}[X,Y] - \frac{t^2}{12}[X,[X,Y]] - \frac{t^2}{12}(Y,[X,Y]] + \cdots$$

pour $t \neq 0$, $Z_0(X,Y) = X+Y$; bien sûr $Z_1(X,Y) = Z(X,Y)$. Il suffit alors d'établir que, pour u et v distributions G-invariantes,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(X) \otimes v(Y), \left(\frac{j(tX)j(tY)}{j(tZ_t(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z_t(X,Y))\right\rangle = 0 \qquad (5)$$

puisque les deux membres de (4) sont les valeurs respectives de cette expression $\langle \cdots \rangle$ pour $t=0$ et pour $t=1$.

Pour traiter les termes en Z_t on utilise une méthode à la Moser : trouver un chemin de difféomorphismes

$$\Phi_t : (X,Y) \mapsto (X_t, Y_t) = (a_t(X,Y) \cdot X, b_t(X,Y) \cdot Y)$$

de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ (au voisinage de l'origine), donnés par l'action adjointe de $a_t(X,Y)$ et $b_t(X,Y)) \in G$ et qui transforment les Z_t en leur analogue du cas abélien, i.e.

$$Z_t \circ \Phi_t(X,Y) = Z_t(X_t,Y_t) = X+Y. \qquad (6)$$

Compte tenu de $Z_0(X,Y) = X + Y$ cette égalité équivaut, par dérivation, à

$$\partial_t Z_t + (\partial_X Z_t)\,\partial_t X_t + (\partial_Y Z_t)\,\partial_t Y_t = 0$$

et l'expression souhaitée de (X_t, Y_t) à

$$\begin{aligned} \partial_t X_t = [A_t(X_t,Y_t), X_t]\ ,\ \partial_t Y_t = [B_t(X_t,Y_t), Y_t] \\ \text{avec } (\partial_t a_t) a_t^{-1} = A_t(X_t,Y_t)\ ,\ (\partial_t b_t)\, b_t^{-1} = B_t(X_t,Y_t); \end{aligned} \tag{7}$$

Ici A_t, B_t et les dérivées de Z_t sont calculés en (X_t, Y_t). En remplaçant ce point par (X,Y) on voit donc que la construction fonctionnera si on a deux fonctions $A_t, B_t : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telles que

$$\partial_t Z_t = (\partial_X Z_t)\,[X, A_t] + (\partial_Y Z_t)\,[Y, B_t],$$

où A_t, B_t et les dérivées de Z_t sont maintenant calculés en (X,Y). Limitons-nous désormais à $t = 1$ pour simplifier l'écriture, en oubliant alors l'indice t ; le cas général s'en déduira en remplaçant (X,Y) par (tX, tY), A par A_t etc. D'après la définition de Z_t il nous faut choisir A et B tels que

$$\partial_{t=1} Z_t(X,Y) = (\partial_X Z)\,X + (\partial_Y Z)\,Y - Z(X,Y) = (\partial_X Z)\,[X,A] + (\partial_Y Z)\,[Y,B]. \tag{8}$$

Or la définition de Z et la différentielle (1) de exp entraînent

$$\partial_X Z = \frac{\operatorname{ad} Z}{1 - e^{-\operatorname{ad} Z}} e^{-\operatorname{ad} Y} \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\ ,\ \partial_Y Z = \frac{\operatorname{ad} Z}{1 - e^{-\operatorname{ad} Z}} \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} Y}}{\operatorname{ad} Y},$$

d'où résulte facilement que (8) équivaut à la *première équation de Kashiwara-Vergne* :

$$Z(Y,X) = X + Y - \left(1 - e^{-\operatorname{ad} X}\right) A(X,Y) - \left(e^{\operatorname{ad} Y} - 1\right) B(X,Y) \tag{KV1}$$

(le changement de $Z(X,Y)$ en $Z(Y,X)$ est dû à l'action du facteur $e^{-\operatorname{ad} Y}$, puisque $e^{-Y}\left(e^Y e^X\right) e^Y = e^X e^Y$). Les équations différentielles (7) avec $A_t = t^{-1} A(tX, tY)$, $B_t = t^{-1} B(tX, tY)$ donneront alors, en remontant les calculs, les difféomorphismes Φ_t cherchés.

Remarque. Le couple $(A,B) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et l'application $\Phi = \Phi_1$ qui s'en déduit (ou plus exactement son inverse $F = \Phi^{-1}$) jouent un rôle important dans l'approche du problème de Kashiwara-Vergne par les associateurs de Drinfeld. Le premier correspond à une "dérivation tangentielle" de l'algèbre de Lie libre à deux générateurs, la seconde à un "automorphisme tangentiel" et l'associativité $Z(Z(X,Y),T) = Z(X, Z(Y,T))$ conduit à des identités non triviales sur (A,B) qui permettent de relier les propriétés de F à une "relation du pentagone"...

2.3 La seconde équation de Kashiwara-Vergne

Revenons à (5). D'abord l'expression (1) de j donne

$$\partial_t \log j^{1/2}(tX) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{e^{t \operatorname{ad} X} - 1} - \frac{1}{t}\right),$$

par suite

$$\begin{aligned} \partial_{t=1} \left(\frac{j(tX) j(tY)}{j(tZ(X,Y))}\right)^{1/2} = T(X,Y) \left(\frac{j(X) j(Y)}{j(Z(X,Y))}\right)^{1/2}, \\ \text{en notant } \ T(X,Y) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{e^{\operatorname{ad} X} - 1} + \frac{\operatorname{ad} Y}{e^{\operatorname{ad} Y} - 1} - \frac{\operatorname{ad} Z}{e^{\operatorname{ad} Z} - 1} - 1\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Il reste à dériver un terme de la forme $g(Z_t(X,Y))$ avec $g = j^{-1/2}f$: d'après (8) on a

$$\partial_{t=1} g(Z_t) = D_{A,B}\,(g \circ Z)$$

en notant $D_{A,B}$ l'opérateur différentiel agissant sur une fonction $\varphi(X,Y)$ selon

$$D_{A,B}\varphi = (\partial_X \varphi)\,[X,A] + (\partial_Y \varphi)\,[Y,B].$$

La G-invariance de j entraîne $D_{A,B}(j(X)j(Y)) = 0$, ce qui permet d'écrire

$$\partial_{t=1}\left(\left(\frac{j(X)j(Y)}{j(Z_t(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z_t(X,Y))\right) = D_{A,B}\left(\left(\frac{j(X)j(Y)}{j(Z(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z(X,Y))\right).$$

En regroupant cela avec (9) il vient

$$\partial_{t=1}\left\langle u(X)\otimes v(Y), \left(\frac{j(tX)j(tY)}{j(tZ_t(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z_t(X,Y))\right\rangle =$$

$$= \left\langle u(X)\otimes v(Y), (D_{A,B} + T(X,Y))\left(\left(\frac{j(X)j(Y)}{j(Z(X,Y)}\right)^{1/2} f(Z(X,Y))\right)\right\rangle. \qquad (10)$$

L'invariance des distributions u et v, qui n'est pas intervenue jusque-là, permet de simplifier cette expression.

Lemme 2 *Soit u une distribution invariante sur $\mathfrak{g}$. Pour toute fonction $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (de classe C^∞ et avec* $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} F$ *compact) on a*

$$\langle u(X), \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \partial_X F(X))\rangle = 0.$$

Preuve. Soit $F(X) = \sum_i F_i(X)e_i$ la décomposition de F selon une base (e_i) de $\mathfrak{g}$. L'invariance de u donne

$$\partial_{s=0}\left\langle u(X), F_i\left(e^{-s\,\operatorname{ad} e_i}X\right)\right\rangle = \langle u(X), \partial_X F_i(X)[X,e_i]\rangle = 0,$$

d'où le résultat en sommant sur i. ■

En appliquant le lemme à $F(X) = \varphi(X)A(X)$, où φ est une fonction scalaire et A à valeurs dans $\mathfrak{g}$, on en déduit $\langle u, (\partial_X\varphi)\,[X,A]\rangle = -\langle u, \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \partial_X A)\,\varphi\rangle$ puis, en remplaçant $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, u par $u\otimes v$ etc.,

$$\langle u(X)\otimes v(Y), D_{A,B}\varphi(X,Y)\rangle = -\langle u(X)\otimes v(Y), \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X\circ\partial_X A + \operatorname{ad} Y \circ \partial_Y B)\,\varphi(X,Y)\rangle \qquad (11)$$

pour toute fonction scalaire φ, si u et v sont invariantes. D'après (10) et (11), l'égalité (5) sera donc vérifiée si A et B satisfont à l'équation (KV2) ci-dessous.

Conjecture 3 (Kashiwara-Vergne) *Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ il existe $A(X,Y)$ et $B(X,Y)$, séries de crochets de $X, Y \in \mathfrak{g}$ convergentes dans un voisinage de l'origine, vérifiant (KV1) et (KV2) :*

$$Z(Y,X) = X + Y - \left(1 - e^{-\operatorname{ad} X}\right)A(X,Y) - \left(e^{\operatorname{ad} Y} - 1\right)B(X,Y) \qquad \text{(KV1)}$$

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X\circ\partial_X A + \operatorname{ad} Y\circ\partial_Y B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{e^{\operatorname{ad} X}-1} + \frac{\operatorname{ad} Y}{e^{\operatorname{ad} Y}-1} - \frac{\operatorname{ad} Z}{e^{\operatorname{ad} Z}-1} - 1\right) \qquad \text{(KV2)}$$

avec $Z = Z(X,Y)$ (traces d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$).

Théorème 4 *[4] La conjecture entraîne que, pour tout groupe de Lie G d'algèbre $\mathfrak{g}$,*

$$(u *_{\mathfrak{g}} v)\widetilde{\ } = \widetilde{u} *_G \widetilde{v}$$

pour toutes distributions G-invariantes u, v sur $\mathfrak{g}$ (à supports convenables).

Il est avantageux de modifier légèrement le problème en remplaçant l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par l'*algèbre de Lie libre (complétée)* $\mathfrak{L}_{X,Y}$ engendrée par les éléments X et Y, avec $A, B \in \mathfrak{L}_{X,Y}$, ce qui donnera une solution universelle valable pour toute algèbre $\mathfrak{g}$ (indépendamment des propriétés particulières que pourrait posséder cette algèbre). Ce point de vue est adopté systématiquement dans l'approche formelle développée dans les articles [1][2][3].

Il est facile de trouver des séries de Lie A et B satisfaisant (KV1) : écrite sous la forme de Dynkin, la formule de Campbell-Hausdorff peut s'écrire sous la forme

$$Z(Y, X) = X + Y + [X, P(X, Y)] + [Y, Q(X, Y)]$$

en isolant les crochets qui commencent par X resp. Y, et il suffit de prendre

$$A = \frac{\operatorname{ad} X}{e^{-\operatorname{ad} X} - 1} P \ , \ B = \frac{\operatorname{ad} Y}{1 - e^{\operatorname{ad} Y}} Q$$

pour obtenir (KV1). La vraie difficulté est donc de montrer (KV2). Il n'y a malheureusement pas de choix canonique de A et B susceptible de simplifier le problème. Par exemple, si un couple (A, B) est solution de (KV1) et (KV2), le couple $(A + \lambda(Z - X), B + \lambda(Z - Y))$ avec $Z = Z(X, Y)$ est encore solution pour tout scalaire λ.

2.4 Trente ans de KV

1978. L'article originel [4] introduit la conjecture et la démontre (par un calcul aussi brillant que mystérieux) pour les algèbres de Lie *résolubles*. D'après un vieux théorème de Lie, on peut choisir dans ce cas une base de l'algèbre complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dans laquelle les $\operatorname{ad} X$ sont représentés par des matrices triangulaires supérieures. Le calcul des traces de séries en $\operatorname{ad} X$ et $\operatorname{ad} Y$ s'effectue alors comme si ces applications commutaient entre elles, ce qui simplifie grandement le problème.
1981. Démonstration de la conjecture pour la plus simple des semi-simples, l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$, par un calcul bête et méchant...
1999. M. Vergne démontre la conjecture pour les algèbres de Lie *quadratiques*, une large famille contenant toutes les semi-simples.
2000-2006. Une série de travaux d'Alekseev, Meinrenken et Torossian aboutissent à une preuve complète de la conjecture, à l'aide de la quantification par déformation de Kontsevich. Un bon résumé en est donné dans [7].
2008-2009. Dans deux autres articles fondamentaux [1][2], Alekseev, Enriquez et Torossian donnent une nouvelle preuve de la conjecture, basée cette fois sur le théorème d'existence d'associateurs de Drinfeld.
2009-2010. Reprenant le formalisme de [2], Alekseev et Torossian donnent une preuve "triviale" du cas quadratique [3], où "triviale" signifie : sans utiliser le théorème de Drinfeld. La même méthode conduit aussi à une preuve "triviale" du cas résoluble [6]. Ces deux preuves seront esquissées au paragraphe 3.

2.5 Symétries du problème KV

Le problème KV possède les deux symétries suivantes, qui permettent de le simplifier un peu.

Proposition 5 *(i) Si (A, B) est un couple solution du problème (KV1)(KV2), alors aussi les couples $(\sigma_1 A, \sigma_1 B)$ et $(\sigma_2 A, \sigma_2 B)$ définis par*

$$\begin{cases} \sigma_1 A(X,Y) = B(-Y,-X) \\ \sigma_1 B(X,Y) = A(-Y,-X) \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_2 A(X,Y) = e^{\operatorname{ad} X} B(Y,X) + \frac{1}{2}\left(Z(X,Y) - X\right) \\ \sigma_2 B(X,Y) = e^{-\operatorname{ad} Y} A(Y,X) - \frac{1}{2}(Z(X,Y) - Y) \end{cases}$$

(ii) On $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = Id$ et $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.
(iii) On peut toujours modifier un couple solution du problème pour le rendre invariant par σ_1 et σ_2.

Nous omettons ici la preuve de *(i)* et *(ii)*, vérification facile pour σ_1, un peu moins pour σ_2. Pour *(iii)* on observe que la linéarité du problème permet de remplacer (A, B) par

$$\frac{1}{4}\left(A + \sigma_1 A + \sigma_2 A + \sigma_1\sigma_2 A\ ,\ B + \sigma_1 B + \sigma_2 B + \sigma_1\sigma_2 B\right).$$

3 Esquisse d'une preuve simplifiée (cas quadratique ou résoluble)

En exploitant le formalisme qu'ils ont développé dans [2], Alekseev et Torossian démontrent dans [3] le théorème suivant, dans le cadre de la version "algèbre libre à deux générateurs" de la conjecture. Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre des séries formelles en les variables (non commutatives) $x = \operatorname{ad} X$ et $y = \operatorname{ad} Y$, et τ l'anti-involution de $\mathcal{A}$ définie par $\tau(x) = -x$, $\tau(y) = -y$; on a donc $\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$ pour tous $a, b \in \mathcal{A}$.

Théorème 6 *Soit (A, B) un couple de séries de Lie en (X, Y) solution de (KV1). Il existe alors $a \in \mathcal{A}$ tel que $\tau(a) = -a$ et que l'on ait l'égalité modulo $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$*

$$\operatorname{ad} X \circ \partial_X A + \operatorname{ad} Y \circ \partial_Y B \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{e^{\operatorname{ad} X} - 1} + \frac{\operatorname{ad} Y}{e^{\operatorname{ad} Y} - 1} - \frac{\operatorname{ad} Z}{e^{\operatorname{ad} Z} - 1} - 1\right) + a.$$

Ce résultat, qui permet d'espérer déduire (KV2) de (KV1) (voir corollaire ci-dessous) est obtenu en exploitant habilement l'associativité de la multiplication du groupe, qui se traduit sur la formule de Campbell-Hausdorff par

$$Z_t(Z_t(X,Y),T) = Z_t(X, Z_t(Y,T)).$$

En dérivant en $t = 1$ cette identité, on en déduit grâce à (8) certaines identités sur A et B qui entraînent le théorème...

Corollaire 7 *La conjecture de Kashiwara-Vergne est vraie :*
(i) pour les algèbres de Lie quadratiques [3]
(ii) pour les algèbres de Lie résolubles [6].

Preuve. Partons d'un couple (A, B) solution de (KV1). Lorsqu'on passe de l'algèbre libre $\mathfrak{L}_{X,Y}$ à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (de dimension finie), $\partial_X A$ et $\partial_Y B$ s'expriment par des séries en $x = \operatorname{ad} X$ et $y = \operatorname{ad} Y$, et l'égalité du théorème entraîne une égalité de traces d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \partial_X A + \operatorname{ad} Y \circ \partial_Y B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{e^{\operatorname{ad} X} - 1} + \frac{\operatorname{ad} Y}{e^{\operatorname{ad} Y} - 1} - \frac{\operatorname{ad} Z}{e^{\operatorname{ad} Z} - 1} - 1\right) + \operatorname{tr} a,$$

puisque la trace s'annule sur $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$. Pour établir (KV2) il suffit donc de montrer que $\operatorname{tr} a = 0$.
(i) Supposons $\mathfrak{g}$ quadratique, i.e. admettant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et $\mathfrak{g}$-invariante ; c'est le cas notamment pour une algèbre de Lie semi-simple, avec la forme de Killing $K(X,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y)$. Alors $x = \operatorname{ad} X$ et $y = \operatorname{ad} Y$ sont antisymétriques par rapport à cette forme, soit ${}^t x = -x$, ${}^t y = -y$, d'où ${}^t a = \tau(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\operatorname{tr} a = \operatorname{tr} \tau(a)$. Si de plus $\tau(a) = -a$ on en déduit $\operatorname{tr} a = 0$. *Dans le cas quadratique, toute solution de (KV1) vérifie aussi (KV2)* ; en ce sens le problème est "trivial" dans ce cas.
(ii) Par la Proposition 4(*iii*) on peut modifier (A,B) pour le rendre invariant par les symétries σ_1 et σ_2. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ engendré par $xy - yx$; cet idéal contient $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$. On vérifie alors grâce aux symétries que $\operatorname{ad} X \circ \partial_X A + \operatorname{ad} Y \circ \partial_Y B$ est pair en (X,Y) modulo $\mathcal{I}$.
Supposons maintenant $\mathfrak{g}$ résoluble. D'après le théorème de Lie déjà cité en 2.4 la trace s'annule sur $\mathcal{I}$ tout entier. Par suite le premier membre de (KV2) est pair en (X,Y).
Il est d'autre part facile de voir que le second membre de (KV2) l'est aussi. Il reste à examiner la parité du terme $\operatorname{tr} a$. Or, si $x_1, ..., x_n \in \mathcal{A}$ sont égaux à x ou y on a

$$\tau(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_1 \sim (-1)^n x_1 \cdots x_n \text{ modulo } \mathcal{I}.$$

Par suite si on décompose a en parties paire et impaire, soit $a = a_+ + a_-$, on a $\tau(a) \sim a_+ - a_-$ mod. $\mathcal{I}$. Si de plus $\tau(a) = -a$ on en déduit $a \sim a_-$. L'égalité modulo $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ du Théorème 5 entraîne une égalité modulo $\mathcal{I}$, dans laquelle on pourra donc supposer a impair. En séparant parties paire et impaire dans l'égalité de traces on obtient donc (KV2) et $\operatorname{tr} a = 0$. Le problème est ici "presque trivial" : *toute solution de (KV1) est aussi, quitte à effectuer une modification élémentaire, solution de (KV2).* ■

Références

[1] ALEKSEEV, A., ENRIQUEZ, B. and TOROSSIAN, C., *Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations*, `arXiv :0903.4067`.

[2] ALEKSEEV, A. and TOROSSIAN, C., *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators*, Ann. of Maths. 175 (2012), 415-463 ; `arXiv :0802.4300`.

[3] ALEKSEEV, A. and TOROSSIAN, C., *On triviality of the Kashiwara-Vergne problem for quadratic Lie algebras*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 347 (2009), 1231-1236 ; `arXiv :0909.3743`.

[4] KASHIWARA, M. and VERGNE, M., *The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions*, Invent. Math. 47 (1978), 249-272.

[5] RAÏS, M., *Opérateurs différentiels bi-invariants (d'après M. Duflo)*, Séminaire Bourbaki, exposé n°498 (Février 1977).

[6] ROUVIÈRE, F., *"Trivialité" du problème de Kashiwara-Vergne pour les algèbres de Lie résolubles*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 348 (2010), 739-742.

[7] TOROSSIAN, C., *La conjecture de Kashiwara-Vergne [d'après Alekseev et Meinrenken]*, Séminaire Bourbaki, exposé n°980 -Juin 2007).