HISTOIRES DE MAXIMA ET MINIMA

François Rouvière (Laboratoire J.-A. Dieudonné)

Résumé

« Le plus grand possible », « le plus petit possible » : depuis deux mille ans et plus l'histoire des sciences est riche en questions de cette nature, issues notamment de la géométrie, de l'optique ou de la mécanique.

De la fondation de Carthage par la reine Didon (selon une légende rapportée dans l'Énéide), en passant par un problème d'Euclide vers l'an -300, la réflexion de la lumière sur un miroir selon Héron d'Alexandrie vers 100, une étude de Kepler sur le volume des tonneaux de vin en 1615, la loi dite de Snell-Descartes de réfraction de la lumière (1621, 1637), le problème des brachistochrones abordé par Galilée et résolu par Johann Bernoulli (1696), les exemples abondent où ce que nous appelons maintenant problèmes d'extremum, ou d'optimisation, sont à l'origine de progrès majeurs.

Après des siècles d'étude de ces problèmes par des procédés ad hoc, parfois très ingénieux, il a fallu attendre le XVIIème pour découvrir enfin des méthodes générales pour les résoudre : c'est la notion de dérivée, entrevue par Fermat dès 1629, puis le calcul différentiel créé par Leibniz et Newton dans le dernier quart du XVIIème siècle. Une cinquantaine d'années plus tard Euler (1736) puis Lagrange (1755, à l'âge de dix-neuf ans) jetteront les bases du « calcul des variations ».

[L'exposé ne s'appuie sur aucune connaissance scientifique au delà du baccalauréat.]

1. Didon et la peau du taureau

Didon, princesse de Tyr (Phénicie) au IXème siècle avant notre ère, décide de quitter la Phénicie à la suite de l'assassinat de son mari par son propre frère Pygmalion. Elle prend la mer avec quelques compagnons d'armes, et arrive sur les rivages de l'actuelle baie de Tunis. La suite est contée par Virgile dans l'Énéide :

> *Devenere locos ubi nunc ingentia cernes*
> *Mœnia, surgentemque novæ Carthaginis arcem ;*
> *Mercatique solum, facti de nomine Byrsam,*
> *Taurino quantum possent circumdare tergo.*[1]
> Virgile, Énéide I, 365.

Selon la légende, Didon aurait transformé en un vaste espace cettte attribution dérisoire de terrain, en découpant en fines lanières la peau du taureau. Mettant bout à bout ces lanières elle forme une longue corde, qu'elle dispose en demi-cercle délimitant ainsi, avec le rivage de la baie, le grand terrain sur lequel elle fonda Carthage. Sous forme plus précise, ce qu'il est convenu d'appeler "problème de Didon" est donc le suivant :
quelle forme donner à une courbe de longueur donnée, allant d'un point à un autre (non donnés a priori) d'une ligne droite, pour qu'elle délimite avec cette droite une surface maximale ?
La solution est le demi-cercle ; fallait-il voir cela suggéré par le verbe *circum*dare de Virgile ?

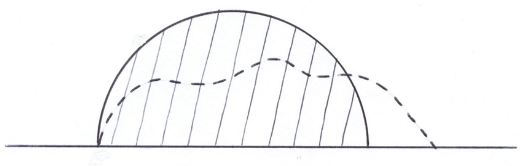

FIG. 1 – Problème de Didon

Ce problème légendaire de recherche de maximum, apparemment le plus ancien de tous, est loin d'être le plus facile. Il fait partie de ce qu'on appelle maintenant les problèmes isopérimétriques (figures de périmètre donné et d'aire maximale ou, dans l'espace, figures de surface donnée et de volume maximal). Il fallut attendre le XIXème siècle (Jacob Steiner, 1842) pour avoir la première solution (presque) complète du problème de Didon, et le début du XXème pour une solution complètement rigoureuse !
Références : [N] p.45, 56 ; [T] chap.2.

[1] C'est ici qu'ils arrivèrent, ici où vous allez voir les superbes remparts et les hautes tours de la naissante Carthage. Ils y achetèrent tout ce que pouvait encercler de terrain la peau d'un taureau, terrain appelé Byrsa de ce fait.

2. Euclide, les parallélogrammes et le champ optimal (vers - 300)

Le grand traité d'Euclide, *Les éléments*, regroupe toutes les connaissances mathématiques de son époque en arithmétique et en géométrie. Mais il ne contient qu'un seul problème de maximum, dans le livre VI consacré aux figures semblables. En version anglaise ([K] p.74), le résultat s'énonce :

"*Of all the parallelograms applied to the same straight line [constructed on part of the straight line] and deficient [from the parallelogram on the entire straight line] by parallelogramic figures similar and similarly situated to that [given parallelogram] described on the half of the straight line, [the area of] that parallelogram is greatest which is applied to the half of the straight line and is similar to the defect.*"
Euclide, Éléments, livre VI, Proposition 27.

Il est permis de penser que, même traduit en français, l'énoncé d'Euclide garderait une certaine obscurité... Contentons-nous d'une version agricole et simplifiée du problème, où les parallélogrammes seront remplacés par des rectangles :
trouver un champ rectangulaire d'aire maximale délimité par une clôture de longueur donnée.
Sous forme algébrique le problème revient à
trouver deux nombres (les deux côtés du rectangle) *de somme donnée* (le demi-périmètre de la clôture) *et de produit maximal* (la surface du champ).

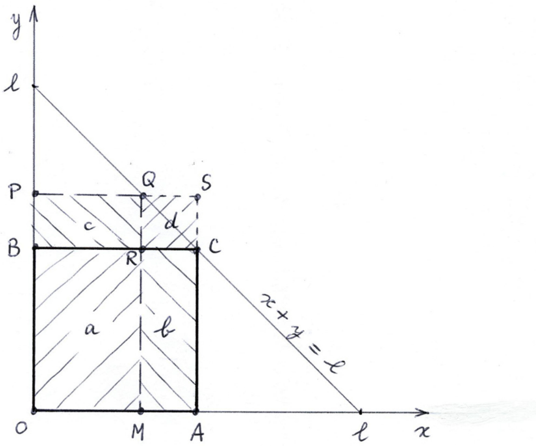

Fig. 2 – Problème d'Euclide

La résolution du problème, sous sa forme géométrique, est particulièrement simple. On peut en effet visualiser tous les rectangles $OMQP$ de demi-périmètre donné ℓ : le sommet Q est sur la diagonale d'équation $x + y = \ell$. Montrons que *le carré $OACB$ donne la surface maximale.* En complétant la figure par le rectangle

$QRCS$, qui est en fait un carré, on a $AC = BC$ et $AM = BP$; les rectangles $AMRC$ et $BPSC$ ont donc la même surface, soit $b = c + d$. Par suite

$$a + b = a + c + d > a + c \ .$$

La surface du carré $OACB$ est donc supérieure à celle du rectangle $OMQP$, ce qu'il fallait démontrer.

Euclide démontre sa Proposition 27 sur les parallélogrammes par un argument de triangles semblables, d'où sa place dans le livre VI des *Éléments*.
Référence : [T] p.27.

3. Héron d'Alexandrie et la réflexion (vers 100)

La loi de la réflexion de la lumière sur un miroir plan (ou même courbe) était déjà connue d'Euclide (Proposition 1 de sa *Catoptrica*) : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Quatre cents ans plus tard Héron d'Alexandrie y apporte une très intéressante précision :

"*Je dis que de tous les rayons incidents [issus d'un point donné] réfléchis vers un point donné par un miroir plan ou sphérique, les plus courts sont ceux qui sont réfléchis à angles égaux.*"
Héron, *Catoptrica.*

C'est la première apparition d'un "principe de moindre action" pour un problème physique, suggérant l'idée vague que, parmi toutes les solutions possibles, la nature choisit toujours la plus courte, ou la plus simple...

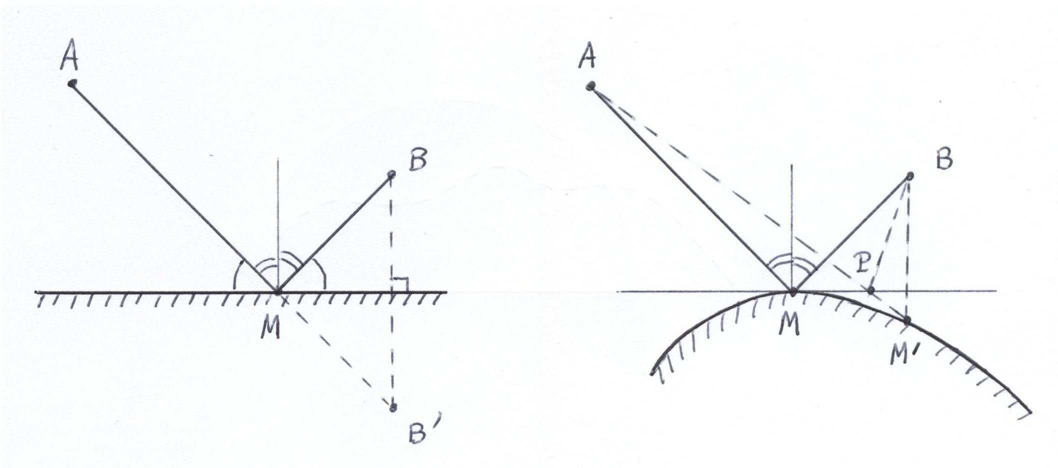

Fig. 3 – Loi de la réflexion

Le résultat de Héron s'obtient par un argument géométrique simple et élégant. Prenons d'abord un miroir plan. Il s'agit de choisir un point M sur la droite D tel que le trajet total $AM + MB$ soit le plus court possible. Si on considère le point B', symétrique de B par rapport à la droite D, on a $MB = MB'$ et on doit choisir M pour que $AM + MB'$ soit le plus court possible. La réponse est bien connue : le point M cherché est l'intersection de D avec la droite AB'. Par suite AM et MB' forment des angles égaux avec la droite D, donc aussi AM et MB, ce qu'il fallait démontrer.

Héron étend ensuite son raisonnement au cas d'un miroir convexe. Pour montrer que $AM + MB < AM' + M'B$, il introduit le point P, intersection de AM' avec la tangente en M au miroir convexe. Par le raisonnement précédent on a

$$AM + MB < AP + PB \ .$$

D'autre part, la classique inégalité triangulaire (un côté d'un triangle est inférieur à la somme des deux autres) donne

$$PB < PM' + M'B \ .$$

Il n'y a plus qu'à ajouter AP pour obtenir

$$AM + MB < AP + PM' + M'B = AM' + M'B \ ,$$

quod erat demonstrandum.
Référence : [FG] p.202.

4. Kepler et ses tonneaux de vin (1615)

1613 : Johann Kepler (1571-1630) se remarie. Sa première épouse, Barbara, était décédée en 1611 et Kepler cherchait, semble-t-il, quelqu'un pour s'occuper de ses enfants. Au terme d'un choix difficile entre onze candidates[2], Kepler épouse Susanna.

Or il se trouve que, à la suite d'une récolte exceptionnelle, il y avait à Linz cette année-là du vin en abondance et de prix raisonnable. Kepler, jeune marié, s'en fait livrer plusieurs tonneaux. Quelle ne fut pas sa surprise de voir la méthode utilisée par son marchand pour comparer la capacité des tonneaux : introduisant une règle par l'orifice en haut, il la pousse jusqu'à toucher le fond du tonneau, du côté opposé, et se contente de cette seule mesure pour en évaluer la capacité ! Citons Kepler :
"*Jeune marié, j'ai pensé qu'il convenait que j'entreprenne un nouveau sujet d'étude mathématique et que j'approfondisse les lois géométriques d'une mesure si utile dans l'économie domestique, et que je clarifie ses bases si tant est qu'elle en ait.*"

Cette phrase est tirée de son ouvrage "*Nova stereometria doliorum vinarorium*"[3], paru en 1615, et dont le résultat principal est le
"Théorème V. *De tous les cylindres de même diagonale, celui de plus grande capacité est celui dont le rapport du diamètre de base à la hauteur est* $\sqrt{2}$."

[2]Selon Arthur Koestler, *Les somnambules* (partie 4, chapitre 10 "La fiancée calculée"), Kepler "résolut le problème de la femme à choisir selon une méthode fort proche de celle qu'il avait suivie pour découvrir l'orbite de Mars : il fit une série de fautes qui auraient pu être fatales mais qui s'annulaient ; et jusqu'au dernier moment, il ne se rendit pas compte qu'il tenait la bonne solution."

[3]Nouvelle géométrie du volume des tonneaux de vin.

Ce résultat peut bien sûr être regardé comme mineur dans l'œuvre du découvreur des trois lois du mouvement des planètes autour du soleil. Il n'en contient pas moins quelques idées intéressantes.

Résumons la méthode de Kepler. Si on assimile le tonneau à un cylindre, il s'agit de trouver un cylindre circulaire de volume maximal et de diagonale donnée, c'est-à-dire inscrit dans une sphère donnée. Kepler traite d'abord le problème analogue où les cylindres sont remplacés par des "poteaux", c'est-à-dire des parallélépipèdes rectangles de base carrée. Il montre alors, par une méthode purement géométrique comparable à celle expliquée plus haut pour la question d'Euclide, que le poteau de volume maximal est un *cube*.

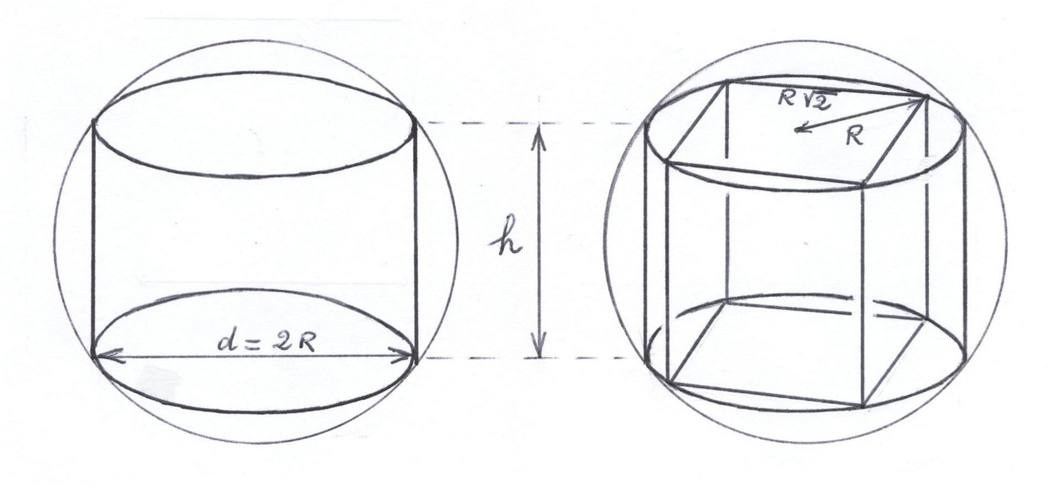

FIG. 4 – Tonneau et poteau de Kepler

Revenant aux cylindres, il inscrit dans chaque cylindre circulaire un poteau, et observe que le rapport de leurs volumes est toujours égal à $\pi/2$. En effet, le cylindre ayant même hauteur que le poteau inscrit, le rapport des volumes égale le rapport de leurs surfaces de base, cercle et carré inscrit, soit $\pi R^2/(R\sqrt{2})^2 = \pi/2$.

Enfin, d'après cette proportionnalité de leurs volumes, le cylindre maximal inscrit dans la sphère correspond à un poteau maximal inscrit dans ce cylindre, donc dans la sphère. Ce poteau doit être un cube, sa hauteur h doit donc être égale au côté du carré de base, soit $h = R\sqrt{2}$. Finalement le diamètre $d = 2R$ du cylindre est $d = h\sqrt{2}$, comme annoncé.

Kepler évoque ensuite la réalisation d'un tel tonneau optimal, et ajoute un très intéressant commentaire :

"*Le cylindre [...] aura ainsi une capacité maximale même si on dévie quelque peu des règles exactes lors de la fabrication du tonneau, car des valeurs proches de l'optimum changent très peu leur capacité. [...] Il en est ainsi car près d'un maximum* *les changements des deux côtés sont, au début, imperceptibles.*"[4]

On trouve là en germe l'idée fondamentale qu'une fonction varie très peu au voisinage d'un maximum ou d'un minimum, cette même idée qui va conduire Fermat à une méthode générale.
Référence : [T] chapitre 6.

5. Pierre de Fermat (1601-1665) : une méthode enfin !

Pour ingénieuses qu'elles soient, les méthodes précédentes de recherche d'un maximum ou minimum ne s'appliquent guère qu'au seul problème pour lequel elles ont été conçues. Fermat est le premier à décrire une méthode de nature générale.

Dans son ouvrage *Méthode pour déterminer les maxima et minima et les tangentes aux lignes courbes* (1629, publié en 1637), il donne enfin la première méthode générale et l'expose sur un exemple. Voici cet exemple, en suivant de près le texte original ; on reconnaîtra le problème traité au §2 par une méthode géométrique. Nous commenterons ensuite la méthode de Fermat.

Partager un segment de longueur donnée ℓ en deux parties x et $\ell - x$, en sorte que le produit soit maximum.
Le produit est $x(\ell - x) = \ell x - x^2$. Remplacer x par $x + e$; il devient

$$(x + e)(\ell - x - e) = \ell x - x^2 + e\ell - 2ex - e^2 \ .$$

Adégaler les deux : $(x + e)(\ell - x - e) \sim x(\ell - x)$.
Supprimer les termes communs : $2ex + e^2 \sim e\ell$. Simplifier par e donne $2x + e \sim \ell$.
Supprimer e, il reste $2x = \ell$. Le segment doit donc être partagé en deux parts égales.

Commentaire. L'idée fondamentale de Fermat est celle déjà énoncée par Kepler : si une fonction f atteint son maximum au point x, alors un petit changement e de cette valeur x ne produit aucun changement sensible de la valeur de la fonction. Fermat écrit cela $f(x + e) \sim f(x)$, avec un signe $\sim$ qu'il faut interpréter comme "presque égal à" et qu'il lit "adégale", mot repris à Diophante. Il calcule avec ces "adégalités" comme on le ferait avec des égalités (faire passer des termes d'un côté à l'autre, etc.). Puis il simplifie (c'est-à-dire divise) par e, et remplace enfin e par 0. Il avait donc simplifié par 0 ce qui aurait pu conduire, comme chacun sait, aux résultats les plus fantaisistes...

Pourtant sa méthode est féconde ! En langage moderne on dirait que le rapport $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ tend vers 0 quand e tend vers 0 (sans être égal à 0), c'est-à-dire que la limite de ce rapport, appelée *dérivée* de la fonction f au point x et notée $f'(x)$, est nulle. Mais la notion de dérivée, comme celle de limite, n'était pas connue de Fermat. Et, faute d'un outil général de calcul des dérivées, il doit, pour appliquer sa méthode

[4]Traduction bien approximative sans doute, issue de la version anglaise du livre [T] dont la version originale est en russe...

à d'autres exemples, reprendre tous les calculs précédents (adégaler, simplifier, supprimer). Cela peut s'avérer pénible si la fonction étudiée n'est plus un polynôme. L'historienne des mathématiques Judith Grabiner [G] a ce beau commentaire :

"*La dérivée a d'abord été utilisée. Puis elle a été découverte. Puis elle a été explorée et développée. Enfin elle a été définie.*"

Satisfait (à juste titre) de sa méthode, Fermat ajoute :

"*Il est impossible de donner une méthode plus générale.*"
"*Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles.*"

Il l'applique également avec succès à la recherche des tangentes aux courbes. Cela n'empêchera pas Descartes de critiquer la méthode de Fermat...
Réferences : [D] p.165 ; [FG] p.358.

6. Loi de la réfraction et principe de Fermat

Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un premier milieu transparent (l'air par exemple) à un second (l'eau ou le verre), il subit une déviation : on dit qu'il est réfracté. L'angle d'incidence i_1 du rayon lumineux est lié à l'angle de réfraction i_2 par la loi

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = C \ ,$$

où C est une constante, indépendante des angles i_1 et i_2.

Connue sous le nom de loi de Descartes (1637) dans les manuels français, elle est plutôt baptisée loi de Snell (1621) dans les textes anglo-saxons, parfois encore loi de Snell-Descartes chez ceux qui souhaitent éviter toute polémique. La loi était en fait connue de Thomas Harriot (1602). Elle fut même énoncée par le mathématicien arabe Ibn Sahl, dans son traité *Sur les instruments ardents*, dès l'an 984 ![5]

Revenons tout de même à Descartes. En 1637 il publie, en annexe à son célèbre *Discours de la méthode*, une *Dioptrique* où il donne une présentation de la loi de la réfraction. Assimilant le phénomène à une balle qui traverserait une toile très fine "*si faible et déliée que cette balle ait la force de la rompre et de passer tout au travers*", Descartes admet que la composante horizontale de la vitesse de la balle est inchangée : "*elle doit demeurer la même qu'elle a été, à cause que cette toile ne lui est aucunement opposée en ce sens-là*". Si v_1 est la vitesse de la balle dans le premier milieu et v_2 dans le second, on devrait donc avoir

$$v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2 \ ,$$

et le rapport des sinus est constant.

[5] B. Guizal et J. Dudley, *Ibn Sahl, inventeur de la loi de la réfraction*, Pour la Science, Novembre 2002, p.24-26.

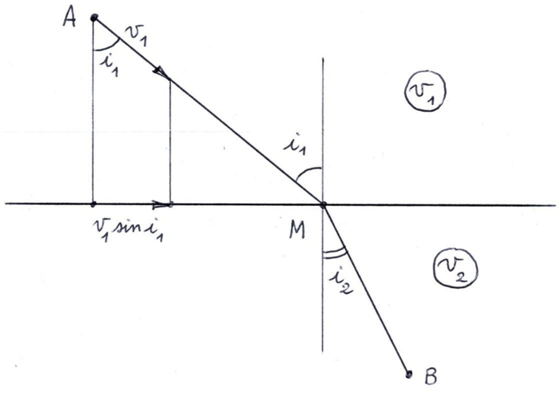

FIG. 5 – Loi de la réfraction

Pour s'accorder à l'expérience, cette formule exigerait que la lumière ait une vitesse v_2 dans l'eau supérieure à sa vitesse v_1 dans l'air, ce qui peut sembler bien peu naturel en dépit de la justification tortueuse qu'en donne Descartes.

Ce travail sera vivement critiqué par Fermat, qui le qualifie de "tâtonnement dans l'ombre". La polémique entre Descartes et Fermat, particulièrement acerbe, durera dix ans et plus. Le dernier mot appartiendra à Fermat qui, une vingtaine d'années plus tard, donnera la loi correcte de la réfraction, déduite de son principe du moindre temps.

En 1657 et 1662 Fermat énonce ce principe, inspiré de Héron d'Alexandrie et appelé désormais *principe de Fermat* : *pour aller d'un point à un autre la lumière suit le trajet de temps le plus court.* Si on l'applique au problème de la réfraction par un dioptre plan, le point M doit être tel que le temps de parcours du rayon lumineux de A vers B (avec les vitesses respectives v_1 et v_2 dans les deux milieux transparents), à savoir

$$\frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} ,$$

doit être minimal. Sa méthode "d'adégalité" conduit Fermat, après des calculs assez pénibles[6], à la loi correcte de la réfraction (1661)

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} .$$

Références : [D] p.165 ; [De] discours second ; [FG] p.428 ; [N] p.104 et 127 ; [T] chapitre 3.

[6]Rappelons qu'il ne disposait pas d'un outil général de calcul des dérivées.

7. Les brachistochrones de Johann Bernoulli (1696)

Reprenant en 1638[7] ses recherches sur la chute des corps, Galilée (1564-1642) compare la durée de chute d'une bille pesante le long d'une droite (plan incliné) et le long d'un quart de cercle. Par des raisonnements intéressants bien qu'incomplets [E], il conclut à une certaine propriété de minimalité du quart de cercle : "*plus un polygone inscrit dans le cercle se rapproche de la circonférence, moins il faut de temps pour le parcourir dans le mouvement de chute.*".

Une soixantaine d'années plus tard, et sans citer Galilée, Johann Bernoulli (1667-1748) pose comme un défi aux plus brillants mathématiciens du monde entier le problème suivant, qu'il vient lui-même de résoudre (Acta Eruditorum, juin 1696) : *dans un plan vertical, trouver la courbe sur laquelle doit glisser (sans frottement) un point matériel pour descendre en un temps minimum sous l'effet de son poids, d'un point donné A à un point donné B.*

Ce problème des *brachistochrones* (de deux racines grecques signifiant "temps le plus court") fut résolu par Jakob Bernoulli (1654-1705, frère aîné de Johann), par Gottfried Leibniz (1646-1716), par Guillaume de l'Hospital (1661-1704) et par un correspondant anonyme. "*Ex ungue leonem*" aurait commenté Bernoulli en lisant ce dernier, "à sa griffe on reconnaît le lion" : Isaac Newton (1642-1727) ! Tous concluaient que la courbe brachistochrone était, non un arc de cercle, mais bien une cycloïde.

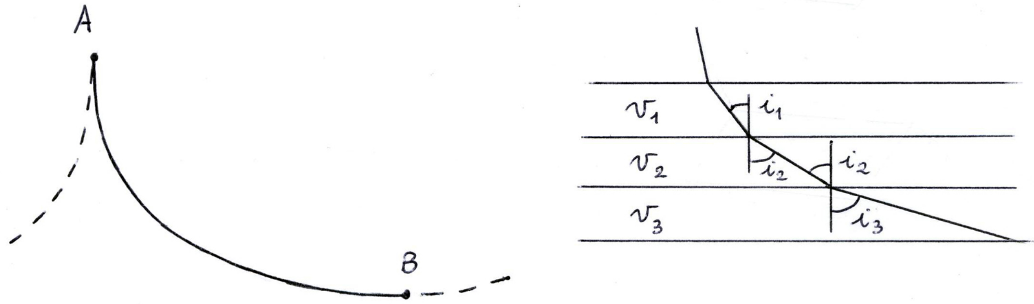

FIG. 6 – Brachistochrone : cycloïde et méthode de Bernoulli

La méthode employée par Johann Bernoulli est particulièrement intéressante. S'appuyant sur la loi de la chute des corps, il note que pour chaque hauteur de chute h donnée la vitesse v du point mobile est connue (c'est $v = \sqrt{2gh}$ comme l'a montré Galilée, où g est l'accélération de la pesanteur). Divisant l'espace en un grand nombre de couches horizontales très minces, et assimilant la courbe cherchée à une succession de petits segments de droites, il applique la loi de la réfraction lumineuse

[7]Soit cinq ans après son tristement célèbre procès. Sans doute Galilée, alors fatigué et malade, souhaitait-il reprendre une activité scientifique, sans toutefois risquer de s'attirer à nouveau les foudres de l'église.

au passage par chacune de ces couches. Le problème est en effet de même nature, et l'on sait depuis Fermat que cette loi correspond au temps de trajet le plus court. Ainsi la quantité $\frac{\sin i}{v}$ est inchangée au passage d'une couche à la suivante, ce qui détermine le changement de direction de la courbe cherchée. Utilisant les outils de calcul différentiel alors disponibles, Bernoulli parvient ainsi à montrer que la courbe est une cycloïde.

Les visiteurs du Musée d'histoire des sciences de Florence pourront le vérifier, dans une salle consacrée à l'œuvre de Galilée, à l'aide d'une bille roulant sur une grande cycloïde ou un grand quart de cercle en bois poli.
Références : [K] p.574 ; [N] chapitre 6 ; [T] chapitre 7.

8. Et ensuite...

Avec Fermat d'une part et Johann Bernoulli de l'autre sont lancées les idées essentielles qui permettront de traiter un grand nombre de problèmes de maximum ou minimum.

Les premières, où l'on recherche un point (ou un nombre) donnant l'extremum, conduiront Newton (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1671) et, indépendamment, Leibniz (vers 1675) à dégager la notion de dérivée et les outils fondamentaux du *calcul différentiel.*

Les secondes, où l'on recherche une courbe (ou une fonction), comme dans les brachistochrones ou le problème de Didon, conduiront au *calcul des variations*, créé par Euler (*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744) et Lagrange (*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies*, 1760).

Références

[D] DHOMBRES, J. (ed.), DAHAN-DALMEDICO, A, BKOUCHE, R. et HOUZEL, C., *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars 1987.

[De] DESCARTES, R., *La dioptrique*, texte disponible à l'adresse :
http ://classiques.uqac.ca/classiques/Descartes/dioptrique/dioptrique.pdf

[E] ERLICHSON, H ;, *Galileo's work on swiftest descent from a circle and how he almost proved the circle itself was the minimum time path*, American Mathematical Monthly, April 1998, p.338-347.

[FG] FAUVEL, J. et GRAY, J. (eds.), *The history of mathematics : a reader*, Mac Millan 1988.

[G] GRABINER, J., *The changing concept of change : the derivative from Fermat to Weierstrass*, Mathematics Magazine, September 1983, p.195-206.

[HS] HAUCHECORNE, B. et SURATTEAU, D, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses 1996.

[K] KLINE, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press 1972.

[N] NAHIN, P., *When least is best*, Princeton University Press 2004.

[T] TIKHOMIROV, V.M., *Stories about maxima and minima*, American Mathematical Society 1990.