## HISTOIRES DE MAXIMA ET MINIMA

*Séminaire "Enseignement des Mathématiques"*

François Rouvière, 11 mai 2005

En reprenant un choix de problèmes classiques d'extremum, élémentaires pour la plupart, je voudrais insister sur leur intérêt pédagogique, au carrefour entre analyse (dérivées, intégrales), géométrie élémentaire, physique (optique, mécanique) et histoire des sciences, en m'efforçant d'en donner une présentation aussi simple que possible.

Certains d'entre eux se prêtent à des activités avec les élèves du secondaire, les autres s'adressent aux étudiants des deux premières années d'université et à ceux des classes préparatoires.

Sauf mention contraire, on se place dans le *plan euclidien* $\mathbb{R}^2$. Toutes les fonctions considérées sont *à valeurs réelles*.

### 1. UNE QUESTION D'EUCLIDE

Attribué à Euclide (vers l'an -300), le problème peut être formulé ainsi :
*Trouver un champ rectangulaire d'aire maximum délimité par une clôture de longueur donnée.*
C'est un problème simple d'*isopérimètres*. En notant $4s$ la longueur donnée de la clôture on recherche donc

$$\max(xy) \text{ pour } x+y=2s \text{ et } x \geq 0, y \geq 0 \ .$$

**Solution géométrique.** On peut visualiser tous les rectangles concernés en traçant le segment de droite $x+y=2s, x \geq 0, y \geq 0$. Une recherche empirique, demandée aux élèves dans un premier temps, devrait les conduire à soupçonner que la solution est le carré $x=y=s$.
Pour le démontrer on observe sur la figure que, pour $s < x \leq 2s$, l'aire $c$ est la somme des aires $b$ et $d$ . En particulier $c > b$ , donc $a+c > a+b$, et l'aire du carré est strictement plus grande que celle du rectangle $(x,y)$. On raisonne de même pour $0 \leq x < s$. On a ainsi résolu "à la main" un problème d'extremum lié !

**Solution algébrique.** En notant $A(x) = xy = x(2s-x)$ l'aire du rectangle le découpage précédent se traduit par

$$A(s) = A(x) + (x-s)^2 \ .$$

Cela revient à mettre sous *forme canonique* le polynôme du second degré

$$A(x) = x(2s-x) = -(x-s)^2 + s^2 \ ,$$

ce qu'on vérifie aussitôt par un calcul algébrique. On retrouve ainsi que $A(x) \leq A(s)$ pour tout $x$, avec égalité si et seulement si $x=s$.
Cela s'écrit encore sous la forme $xy \leq s^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ pour $x, y \geq 0$, d'où l'*inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \ ,$$

avec égalité si et seulement si $x=y$.

**Variante.** *Trouver un rectangle d'aire maximum inscrit dans un cercle donné.*
C'est la version plane d'une question de Kepler (1615, à propos d'une histoire de tonneaux de vin) : trouver un parallélépipède de volume maximum inscrit dans une sphère. On cherche donc

$$\max(xy) \text{ pour } x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0 \ .$$

La fonction "carré" étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il revient au même de rechercher $\max(xy)$ ou $\max(x^2y^2)$. La solution s'obtient donc en remplaçant $x$ et $y$ par leurs carrés dans le problème d'Euclide ; le rectangle cherché est encore le carré $x = y(= R/\sqrt{2})$.

**Questions "duales".** *Trouver un rectangle d'aire donnée et de périmètre minimum.*
*Trouver un rectangle d'aire donnée et de diamètre minimum.*
On recherche donc, pour $a$ donné,

$$\min(x + y) \text{ pour } xy = a \text{ et } x \geq 0, y \geq 0 \ ,$$
$$\min(x^2 + y^2) \text{ pour } xy = a \text{ et } x \geq 0, y \geq 0 \ .$$

L'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique donne une *solution algébrique* immédiate $(x = y)$.
La recherche d'une *solution géométrique*, moins facile, est pourtant fort instructive. On visualise les rectangles d'aire $a$ en traçant l'hyperbole $xy = a$, puis on fait apparaître la somme $x + y$ à l'aide d'une parallèle à la deuxième bissectrice. La figure suggère que son minimum est obtenu lorsque cette droite est la *tangente à l'hyperbole* au point $x = y(= \sqrt{a})$...
De même pour $x^2 + y^2$, carré de la distance à l'origine : la solution est le point de l'hyperbole le plus proche de 0. Le dessin suggère encore que le cercle minimal est *tangent à l'hyperbole* au point $x = y(= \sqrt{a})$.
Ces résultats, découverts ici expérimentalement, seront expliqués le moment venu par le théorème des extremums liés.

## 2. PLUS COURTS CHEMINS

Je note $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ la distance des points $A$ et $B$ du plan euclidien.

**Le problème de Héron d'Alexandrie** (1er siècle). *Un champ est bordé par une rivière rectiligne. Comment aller de A en B dans ce champ, le plus vite possible, si l'on doit en chemin faire boire son cheval dans la rivière ?*
Si $D$ est la droite qui borde la rivière, on recherche donc

$$\min(AM + MB) \text{ pour } M \in D \ .$$

La solution géométrique est aussi élégante que connue. Si les points $A$ et $B$ étaient de part et d'autre de $D$, la solution serait le segment $AB$. Sinon, on se ramène au cas précédent en introduisant le symétrique $B'$ de $B$ par rapport à la droite $D$ ; le minimum de $AM + MB = AM + MB'$ est donné par la ligne droite $AB'$. Par symétrie, les droites $AM$ et $MB$ font alors des angles égaux avec $D$.
On fera observer aux élèves que :
- cette solution s'obtient en introduisant un élément nouveau (le point $B'$), a priori sans rapport avec le problème !
- une solution par le calcul, qui peut leur sembler plus rassurante, obligerait à chercher le minimum d'une fonction de la forme

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - c)^2 + b^2} \ ,$$

qui a de quoi refroidir quelques ardeurs. Ceux qui parviendraient à résoudre en $x$ l'équation dérivée $f'(x) = 0$ auront dû surmonter en chemin les tracasseries de signes soulevées par le passage au carré ou à la racine carrée. On peut douter qu'il leur reste alors assez de lucidité pour découvrir la propriété géométrique simple de la solution, sa construction, et montrer qu'elle donne bien un minimum...

– pour vérifier le résultat expérimentalement, il suffit de tendre de $A$ à $B$ un fil qui passe par un anneau coulissant librement sur la droite $D$. Mais la motivation physique majeure du problème (celle de Héron dans sa *Catoptrica*) est bien sûr la *loi de la réflexion* en optique.

**Variante.** *Flânant au bord de l'eau le long d'un rivage rectiligne, j'aperçois un nageur en difficulté. Que faire pour aller lui porter secours au plus vite ?*
Ce qui importe ici n'est pas le chemin de plus courte longueur, mais celui dont le temps de parcours sera le plus bref, compte tenu de ce que ma vitesse $v$ sur terre diffère de ma vitesse $w$ dans l'eau. En généralisant légèrement la question, on se donne deux points $A$ et $B$ de part et d'autre d'une droite $D$, et on recherche

$$\min\left(\frac{1}{v}AM + \frac{1}{w}MB\right) \text{ pour } M \in D\ .$$

En partant de $A$ faut-il courir tout droit vers le rivage pour rejoindre l'eau au plus vite ? Faut-il au contraire réduire au minimum la longueur du trajet dans l'eau ? Ou vaut-il mieux aller droit de $A$ vers $B$ sur terre comme sur mer ? L'intérêt du problème va au-delà du sauvetage en mer : d'après le principe de Fermat, le trajet minimal $AMB$ est celui d'un rayon lumineux traversant la surface (plane) de séparation entre deux milieux optiques homogènes d'indices de réfraction différents (air et verre par exemple), ce qui conduit à la *loi de la réfraction de Snell-Descartes.*
Pour résoudre le problème par le calcul, on doit annuler la dérivée d'une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{1}{v}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{w}\sqrt{(x-c)^2 + b^2}\ ,$$

ce qui conduit à la condition nécessaire d'extremum

$$\frac{1}{v}\cos\alpha = \frac{1}{w}\cos\beta$$

en notant $\alpha$ (resp. $\beta$) l'angle de $MA$ (resp. $MB$) avec la droite $D$, d'où la loi familière en sinus en remplaçant $\alpha, \beta$ par leurs angles complémentaires[1].
Huygens a donné une solution géométrique. Notons $f(M) = \frac{1}{v}AM + \frac{1}{w}MB$ , $A', B'$ les projections orthogonales de $A, B$ sur $D$ et $\alpha, \beta$ les angles précédents relatifs à un point $M$ quelconque du segment $A'B'$ . Si $M', M, M''$ sont trois points distincts du segment $A'B'$ (avec $A', M', M, M'', B'$ disposés dans cet ordre) on vérifie géométriquement (voir ci-dessous) que

$$f(M') - f(M) > MM'\left(\frac{\cos\beta}{w} - \frac{\cos\alpha}{v}\right)$$
$$f(M'') - f(M) > MM''\left(\frac{\cos\alpha}{v} - \frac{\cos\beta}{w}\right)\ .$$

Le minimum de $f$ est donc réalisé en $M$ si $\frac{1}{v}\cos\alpha = \frac{1}{w}\cos\beta$.
**Preuve des inégalités.** Soit $P$, resp. $Q$, la projection orthogonale de $M'$ sur la droite $AM$, resp. $MB$. On a

$$AM' > AP = AM - MM'\cos\alpha$$
$$M'B > QB = MB + MM'\cos\beta,$$

[1] Me sera-t-il pardonné de n'avoir pas écrit ici le traditionnel $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ? Le présent choix de notations est destiné à faciliter le lien avec le théorème du §4.

d'où la première inégalité. La seconde s'en déduit en échangeant les rôles des points $A$ et $B$.

## 3. EXTREMUM LIÉ

**Gradient et extremum libre.** Si $f$ est une fonction différentiable sur un ouvert du plan, la définition de son gradient

$$f(M') - f(M) = \operatorname{grad} f(M) \cdot \overrightarrow{MM'} + o(MM')$$

conduit aisément à la condition nécessaire d'extremum de $f$ en un point $M_0$ de cet ouvert :

$$\operatorname{grad} f(M_0) = 0 \ .$$

**Exemple : point de Fermat-Steiner-Torricelli.** Soit $ABC$ un triangle dont les trois angles sont strictement inférieurs à $2\pi/3$. On recherche

$$\min(AM + BM + CM) \text{ pour } M \in \mathbb{R}^2 \ .$$

On peut vérifier que ce minimum ne peut être atteint en aucun des sommets du triangle. C'est donc le minimum sur l'*ouvert* complémentaire de $\{A, B, C\}$, sur lequel la fonction est différentiable, et son gradient doit s'annuler au point cherché. En notant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA}/MA$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ les vecteurs unitaires respectifs de $MA, MB, MC$ on obtient la condition nécessaire d'extremum

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0 \ ,$$

qui entraîne plusieurs propriétés géométriques remarquables du point de minimum. On renvoie à [Na] ou [Ti] pour les détails, ou même à mon Petit guide de calcul différentiel (Cassini 2003, p.376).

**Gradient et extremum lié.** *Un nageur épuisé souhaite rejoindre au plus vite la terre ferme. Vers quel point du rivage doit-il se diriger ?*
Pour formaliser la question supposons la courbe $C$ du rivage définie par une équation implicite $g(x, y) = 0$, ou comme chemin paramétré $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ; on supposera $g$ et $\gamma$ continûment différentiables. Clarifier les liens entre ces deux points de vue nécessite le recours au théorème des fonctions implicites. Mais on peut à mon avis laisser cela de côté dans un premier temps, en s'exerçant préalablement à passer de l'un à l'autre point de vue sur divers exemples de courbes. Si on place l'origine à la position actuelle du nageur on recherche donc

$$\min(x^2 + y^2) \text{ pour } (x, y) \in C \ .$$

- *Première méthode* : comparer les distances de 0 aux points de $C$, rechercher la plus courte. Cela conduit, dans l'écriture paramétrique de $C$, à chercher $\min(x(t)^2 + y(t)^2)$, d'où la condition nécessaire
$$x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0$$
au point cherché $\gamma(t_0)$ cherché. Il faut donc rejoindre le rivage orthogonalement.
- *Deuxième méthode* : faire des ronds dans l'eau, je veux dire considérer des cercles de centre 0 et de rayons croissants, et rechercher le premier qui rencontre $C$. Comme à la fin du §1, le dessin suggère que ce cercle critique est tangent à $C$ au point cherché.

La dualité entre les deux méthodes est analogue à celle entre rayons et ondes en optique.
Plus généralement cherchons

$$\min f(x, y) \text{ pour } (x, y) \in C \ ,$$

où $C$ est définie implicitement par $g(x,y)=0$ ou paramétrée par $\gamma$. En supposant $f,g,\gamma$ (continûment) différentiables, la vitesse $\gamma'$ ne s'annulant jamais, on a d'une part $(g\circ\gamma)(t)=0$ pour tout $t$ d'où, par simple dérivation de fonctions composées,

$$\operatorname{grad} g(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0 \text{ pour tout } t\ .$$

D'autre part, si $f$ atteint un minimum au point $\gamma(t_0)$ de $C$ on a nécessairement $(f\circ\gamma)'(t_0)=0$ i.e.

$$\operatorname{grad} f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)=0\ .$$

Orthogonaux au même vecteur $\gamma'(t_0)\neq 0$, *les gradients de $f$ et $g$ au point cherché $\gamma(t_0)$ de $C$ doivent donc être colinéaires* (**théorème des extremums liés**). S'ils sont non nuls tous deux ils définissent les normales aux courbes de niveau de $f$ et de $g$ passant par ce point. Par suite la condition nécessaire d'extremum exprime que *la courbe de niveau de $f$ est tangente à $C$ au point cherché*. On obtient ainsi, dans ce cas simple, une forme géométrique du théorème des extremums liés. Plus tard, après avoir assimilé le théorème des fonctions implicites, il sera toujours temps de généraliser ce résultat et d'introduire les multiplicateurs de Lagrange.

**Exemple 1 : loi de la réflexion et tangente à l'ellipse.** Reprenons le problème de Héron $\min(AM+MB)$ pour $M\in D$, résolu au §2. Ici $D$ est le rivage et les courbes de niveau de $f(M)=AM+MB$ sont les ellipses de foyers $A$ et $B$. On a vu que, au point de minimum, les droites $AM$ et $MB$ sont symétriques par rapport à $D$ ; par le théorème des extremums liés on retrouve ainsi une propriété classique de la tangente à l'ellipse en ce point.

**Exemple 2 : loi de la réfraction.** Ici $f(M)=\frac{1}{v}AM+\frac{1}{w}MB$ et la condition nécessaire d'extremum lié est que $\operatorname{grad} f(M)$ soit orthogonal à $D$ au point cherché. En explicitant cette condition on retrouve la loi de Snell-Descartes sous une forme plus géométrique.

## 4. APPROCHE ÉLÉMENTAIRE DE PROBLÈMES VARIATIONNELS

**Encore "le" plus court chemin.** Au paragraphe 2 on a admis comme allant de soi que *le* plus court chemin d'un point à un autre dans le plan est la ligne droite... Il n'est pas sans intérêt de revenir sur cette affirmation, et de l'approfondir.

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni d'une *norme quelconque* $\|.\|$, soit $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ un chemin continu, d'extrémités $\gamma(a)=A$ et $\gamma(b)=B$. La *longueur* de $\gamma$ est définie comme

$$L(\gamma)=\sup_{\sigma} L_\sigma(\gamma)\ ,$$

où le sup (fini ou non) porte sur toutes les subdivisions $\sigma$ de $[a,b]$ par des points $a=t_0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n=b$ et

$$L_\sigma(\gamma)=\|\gamma(t_1)-\gamma(t_0)\|+\cdots+\|\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1})\|$$

est la longueur de la ligne brisée correspondante.

Si de plus $\gamma$ est continu et continûment dérivable par morceaux on peut montrer, par un peu d'analyse de niveau bac+2, que $L(\gamma)$ est fini et que

$$L(\gamma)=\int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\|\ dt\ .$$

Pour le segment $AB$, défini comme le chemin $\delta(s)=(1-s)A+sB$, $0\leq s\leq 1$, la longueur de chacune de ces lignes brisées est évidemment égale à $\|B-A\|$ tandis que, pour tout autre chemin continu $\gamma$ de $A$ à $B$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\|B-A\|=\|\gamma(t_n)-\gamma(t_0)\|\leq\sum_{j=0}^{n-1}\|\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j)\|=L_\sigma(\gamma)\leq L(\gamma).$$

Le segment $AB$ est donc bien *un* plus court chemin de $A$ à $B$.

Est-ce *le* plus court chemin ? C'est faux pour la norme "de Manhattan"

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y| \ .$$

Pour aller de l'origine $A$ (0-ème rue, 0-ème avenue) au point $B$ ($p$-ème rue, $q$-ème avenue), il y a en effet une multitude de trajets possibles en empruntant rues et avenues de New-York, tous de longueur minimale $\|B-A\|_1 = p+q$. Plus généralement tout chemin continu et continûment dérivable par morceaux $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec $x(t)$ et $y(t)$ fonctions *croissantes*, a pour longueur

$$L(\gamma) = \int_a^b (x'(t) + y'(t))\ dt = (x(b) - x(a)) + (y(b) - y(a)) = \|B-A\|_1 .$$

De même avec la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ : par exemple tout graphe de fonction $f$, continûment dérivable et à dérivée comprise entre $-1$ et $1$, a pour longueur

$$L(\gamma) = \int_a^b \max(1, |f'(x)|)\ dx = b - a = \|B-A\|_\infty \ .$$

Mais le segment de droite $AB$ est bien l'unique plus court chemin dans le cas familier de la norme euclidienne $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ : si $\gamma$ passe par un point $C$ hors de ce segment on a $L(\gamma) \geq AC + CB > AB$. Cette inégalité triangulaire stricte se vérifie par le théorème de Pythagore, en considérant la projection orthogonale de $C$ sur $AB$. Plus généralement on a la proposition suivante.

**Proposition 1** *On suppose le plan muni d'une norme strictement convexe. Alors le segment de droite est l'unique plus court chemin d'un point à un autre.*

Une norme $\|.\|$est dite *strictement convexe* si les conditions $\|a\| = \|b\| = 1$, $a \neq b$ et $0 < t < 1$ entraînent $\|(1-t)a + tb\| < 1$. C'est le cas notamment pour les normes $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ avec $p > 1$.

**Preuve de la proposition.** Soit $AB = \|B-A\|$ la distance des points $A$ et $B$, évaluée à l'aide de la norme $\|.\|$. Comme ci-dessus pour la norme euclidienne il suffit de montrer qu'on a l'inégalité triangulaire stricte : si $C$ est un point quelconque tel que $AC + CB = AB$, alors $C$ doit appartenir au segment $AB$.

Soit en effet $D$ le point du segment $AB$ tel que $AD = AC$. Comme $AC + CB = AB$ on a aussi $DB = DC$. Si $C$ n'appartenait pas au segment $AB$ les points $C$ et $D$ seraient distincts. Pour tout point $E$ du segment $CD$ (autre que $C$ et $D$) on aurait alors $AE < AC$ et $EB < CB$ par la stricte convexité, d'où $AE + EB < AC + CB = AB$, en contradiction avec l'inégalité triangulaire. Donc $C$ appartient au segment $AB$.

**Autour du problème des brachistochrones.** Revenons au plan muni de la norme euclidienne, et considérons un chemin continûment dérivable $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, dont la vitesse $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais pour $a < t < b$. On peut alors le paramétrer par une abscisse curviligne notée $s$. Soit $f(x,y)$ une fonction *continue strictement positive* sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$. Si l'image de $\gamma$ est contenue dans $U$ on peut former l'intégrale

$$F(\gamma) = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt = \int_\gamma f\ ds \ .$$

Problème : *Les extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ étant données, peut-on choisir $\gamma$ pour rendre $F(\gamma)$ minimum ?*

Plusieurs exemples intéressants motivent cette question :

- Pour $f = 1$ il s'agit encore une fois d'une recherche de *plus court chemin* dans le plan euclidien.
- Pour $f = 1/v$, $v$ étant la vitesse de la lumière dans un milieu optique non homogène ($v$ dépend alors du point considéré), l'intégrale $F(\gamma)$ est la durée d'un trajet lumineux le long de $\gamma$. Elle doit être minimale d'après le *principe de Fermat.* À un facteur constant près (vitesse de la lumière dans le vide) $1/v$ est l'indice de réfraction du milieu.
- Pour $f(x, y) = 2\pi y$, l'intégrale $F(\gamma)$ est l'aire de la surface de révolution engendrée par l'image de $\gamma$ tournant autour de l'axe $Ox$. Il s'agit du problème des *surfaces minimales* de révolution.
- Pour $f(x, y) = 1/y$ avec $y > 0$, le problème revient à déterminer les *géodésiques du demi-plan de Poincaré* (question fort intéressante, mais hors programme...)
- Pour $f(x, y) = 1/\sqrt{y}$ avec $y > 0$, c'est le fameux problème des *brachistochrones.* Étymologiquement "temps le plus court", ce nom est dû à Johann Bernoulli pour qualifier une question qu'il venait de résoudre et lança en juin 1696 comme un défi au meilleurs mathématiciens du monde : *dans un plan vertical, trouver la courbe sur laquelle doit glisser (sans frottement) un point matériel pour descendre en un temps minimum sous l'effet de son poids, d'un point donné $A$ à un point donné $B$.* Si on place l'origine en $A$ avec (pour une fois) l'axe $Oy$ dirigé vers le bas, la loi de la chute d'un corps de masse $m$, lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur $g$, donne $mv^2/2 = mgy$ avec $v = ds/dt$ ; la durée de la chute de $A$ vers $B$ le long du chemin $\gamma$ est donc

  $$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{2gy}}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2g}} F(\gamma) \ .$$

  Le problème de Johann Bernoulli fut résolu par Leibniz, Jakob Bernoulli (frère aîné de Johann), L'Hospital, et un correspondant anonyme. "Ex ungue leonem" commenta Bernoulli à propos de ce dernier, affirmant ainsi qu'à sa griffe il avait reconnu le lion - Isaac Newton ! La solution est ici une *cycloïde* ; on la reconnaîtra dans les jardins publics, comme piste de planche à roulettes. Par la suite, entre les mains (expertes) d'Euler puis Lagrange, le problème des brachistochrones conduisit à la naissance du *calcul des variations.* On trouvera dans [Na] ou [Ti] plus de détails sur l'histoire de ce problème.

Le théorème suivant apporte une réponse simple aux questions posées lorsque la fonction $f$ dépend de $y$ seul, ce qui recouvre tous les exemples précédents. Il s'obtient sans recourir aux équations différentielles d'Euler-Lagrange (hors programme au niveau où on se place ici) et montre qu'il y a effectivement minimum, ce que ne donneraient pas ces équations.

**Théorème 2** *Soit $f$ une fonction continue strictement positive sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $y \in I$,*

$$f(y) \cos \alpha(y) = C \ , \tag{1}$$

*où $C$ est une constante. Soit enfin $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ une solution du système différentiel*

$$x' = \cos \alpha(y) \ , \ y' = \sin \alpha(y) \ . \tag{2}$$

*Alors $\gamma$ donne à l'intégrale*

$$F(\gamma) = \int_\gamma f(y)\ ds$$

*une valeur minimale parmi tous les chemins continûment dérivables de mêmes extrémités (et d'image contenue dans $\mathbb{R} \times I$).*

**Commentaire.** Parachutée ici, la définition (1)(2) de la solution $\gamma$ peut être motivée à partir des équations d'Euler-Lagrange, ou mieux par un élégant mélange d'analyse, de mécanique et d'optique dû à Johann Bernoulli lui-même. Il observe que $\int_\gamma f(y)\ ds$ est (à un facteur constant près) le temps de trajet d'un rayon lumineux dans un milieu optique non homogène dont l'indice de réfraction est $f(y)$ au point $(x, y)$. Discrétisant le problème, il remplace ce milieu par une succession de couches horizontales très rapprochées, de hauteurs croissantes $y_1, \ldots, y_n$, d'indices constants $f(y_1), \ldots, f(y_n)$, et le chemin $\gamma$ par une ligne brisée. Le chemin de durée minimale est celui effectivement suivi par la lumière ; on sait qu'il obéit, au passage entre deux couches successives, à la loi de la réfraction

$$f(y_i)\cos\alpha_i = f(y_{i+1})\cos\alpha_{i+1}\ ,$$

où $\alpha_i$ (resp. $\alpha_{i+1}$) est l'angle du rayon avec l'horizontale avant (resp. après) avoir traversé la couche de hauteur $y_i$. En optique, cette situation se rencontre dans l'étude des phénomènes de *mirages*. Faisant tendre $n$ vers l'infini Bernoulli a ainsi "démontré", par ce brillant passage de la mécanique (brachistochrones) à l'optique (principe de Fermat), que, si on note $\alpha$ l'angle du chemin avec l'horizontale - d'où les équations différentielles (2) - l'expression $f(y)\cos\alpha$ doit rester constante - d'où l'équation (1).

**Preuve du théorème.** Soit $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, $s_0 \le s \le s_1$, vérifiant (2) et soit $\delta(t) = (X(t), Y(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, un autre chemin continûment dérivable tracé dans $\mathbb{R} \times I$ et de mêmes extrémités que $\gamma$, i.e.

$$\delta(t_0) = \gamma(s_0) = (x_0, y_0)\ ,\ \delta(t_1) = \gamma(s_1) = (x_1, y_1)\ .$$

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} C\ dx + \int_{y_0}^{y_1} f(y)\sin\alpha(y)\ dy\ .$$

*D'une part*, les changements de variables $x = X(t)$, $y = Y(t)$ donnent, en utilisant (1) puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_1} \big(CX' + f(Y)\sin\alpha(Y)Y'\big)\ dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(Y)\big(X'\cos\alpha(Y) + Y'\sin\alpha(Y)\big)\ dt \\ &\le \int_{t_0}^{t_1} f(Y)\sqrt{X'^2 + Y'^2}\ dt = F(\delta)\ . \end{aligned}$$

*D'autre part*, les changements de variables $x = x(s)$, $y = y(s)$ donnent de même, en utilisant (1) puis (2),

$$\begin{aligned} I &= \int_{s_0}^{s_1} f(y)\big(x'\cos\alpha(y) + y'\sin\alpha(y)\big)\ ds \\ &= \int_\gamma f(y)\ ds = F(\gamma)\ , \end{aligned}$$

d'où le théorème.

**Remarques.** *(i)* En termes plus savants, la clef de la méthode est bien sûr le fait que la forme différentielle "de Hilbert" $f(y)\,(\cos\alpha(y)dx + \sin\alpha(y)dy)$ est fermée si (et seulement si) $f(y)\cos\alpha(y)$ est constante. Ce point de vue peut se généraliser : voir [Y].

*(ii)* En reprenant la démonstration, il est facile de voir que $\gamma$ est le seul chemin paramétré par l'abscisse curviligne qui réalise le minimum de $F$.

## RÉFÉRENCES

Parmi les innombrables textes qui traitent de problèmes d'extremum ou de calcul des variations, j'ai trouvé particulièrement attrayante la lecture des trois suivants, dont je me suis largement inspiré. L'ordre alphabétique d'auteurs coïncide sensiblement avec celui du niveau croissant de difficulté.

[Na] P. J. Nahin, *When least is best*, Princeton University Press 2004.
[Ti] V. M. Tikhomirov, *Stories about maxima and minima*, Math. World volume 1, American Math. Society 1990.
[Y] L. C. Young, *Calculus of variations and optimal control theory*, W.B. Saunders Company 1969.

L'application à la tangente à l'ellipse (§3) est tirée de :

[Ta] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panoramas et synthèses n°1, Société Math. de France 1995.

Laboratoire J.A. Dieudonné
Université de Nice
Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2
*courriel* : frou@math.unice.fr
*page web* : http ://math.unice.fr/~frou