Agrégation (Analyse) **29.2.00**

ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE BESSEL

1. Asymptotique d'une équation différentielle. Soient k une constante réelle et $x(t)$ une solution de l'équation différentielle

$$x'' + \left(1 + \frac{k}{t^2}\right) x = 0 \text{ , avec } t > 0 \text{ .}$$

a. Montrer que pour tout $t_o > 0$ il existe des constantes A et B telles que

$$x(t) = A\cos t + B\sin t + k\int_{t_o}^{t} x(s)\sin(s-t)\frac{ds}{s^2} \text{ .}$$

b. Soit $f(t) = \int_{t_o}^{t} |x(s)|\frac{ds}{s^2}$. Former une inéquation différentielle vérifiée par f, et en déduire que $x(t)$ est bornée sur $[t_o, \infty[$.
c. En déduire qu'il existe des constantes α et β telles que, pour $t \to +\infty$,

$$x(t) = \alpha\cos(t-\beta) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \text{ .}$$

[On pourra écrire $\int_{t_o}^{t} = \int_{t_o}^{\infty} - \int_{t}^{\infty}$.]

2. Asymptotique de la fonction de Bessel J_o.
a. On note $I = \int_0^\infty e^{-ix^2}dx = (\sqrt{\pi}/2)\ e^{-i\pi/4}$ l'intégrale de Fresnel. Montrer que, pour $T \to \infty$,

$$\int_0^T e^{-ix^2}dx = I - \frac{e^{-iT^2}}{2iT} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{T^3}\right) \text{ .}$$

Soient maintenant $a > 0$ et f une fonction C^∞ sur un intervalle contenant $[0, a]$. On considère l'intégrale

$$F_f(t) = \int_0^a f(u)e^{-itu^2}du \text{ , } t > 0 \text{ .}$$

b. Montrer qu'il existe g, de classe C^∞, telle que $f(u) = f(0) + ug(u)$.
c. Déduire de **a** et **b** l'égalité

$$F_f(t) = \frac{I}{\sqrt{t}}f(0) - \frac{i}{2t}f'(0) + \frac{ie^{-ita^2}}{2ta}f(a) - \frac{i}{2t}F_{g'}(t) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ ,}$$

pour $t \to \infty$, d'où $F_f(t) = \mathrm{O}(1/\sqrt{t})$. En déduire le développement

$$F_f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-i\pi/4}f(0) - \frac{i}{2t}f'(0) + \frac{ie^{-ita^2}}{2ta}f(a) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) \text{ .}$$

d. Déduire de là une expression asymptotique de la fonction de Bessel J_o définie par

$$J_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\cos\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\pi/2} e^{it\cos\theta}d\theta \text{ .}$$

[On pourra effectuer le changement $\cos\theta = 1 - u^2$ dans cette dernière intégrale.]
e. Montrer que la fonction $x(t) = \sqrt{t}J_o(t)$ est solution d'une équation différentielle du type de **1**, et comparer les développements asymptotiques de J_o fournis par les deux méthodes.

Références.

De Bruijn, *Asymptotic methods*, p.190-195
Tissier, *Mathématiques générales*, Exercice R.2-8
Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p. 135
Chambert-Loir & C°, *Analyse 1*, p.188.