CHAPITRE II

ESPACES MÉTRIQUES

Ce sont des espaces topologiques particuliers, les plus fréquents ; dans ce cadre, on peut préciser la notion de continuité, et celle de "complétude" joue un rôle crucial. Signalons comme résultats "profonds" de ce chapitre les théorèmes de Heine, de Urysohn, de Baire, "du point fixe", de Stone-Weierstrass, d'Ascoli.

(A) ESPACES MÉTRIQUES

1- On note ici $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. On appelle distance sur un ensemble E une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés

$$(*)\begin{cases} \forall x,y \in E \quad d(x,y) = d(y,x) \\ \forall x,y \in E \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \forall x,y,z \in E \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \end{cases}$$

La dernière s'appelle l' "inégalité triangulaire"

L'ensemble E muni de la distance d s'appelle un "espace métrique"

Naturellement $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne d est un espace métrique, mais la liste suivante d'exemples montre la souplesse de la notion.

Exemples : (1) La distance "triviale" sur tout ensemble E : $d(x,y) = 1$ dès que $x \neq y$

(2) On peut munir $\mathbb{Q}$ de la distance habituelle $d(x,y) = |x-y|$, mais il est aussi utile de considérer d'autres distances sur $\mathbb{Q}$: pour chaque nombre premier p, on définit la distance p-adique $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ par

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ p^{-\alpha} & \text{si } x - y = p^{\alpha} . r \end{cases}$$

, où numérateur et dénominateur de l'expression irréductible de r n'ont plus le facteur p. Vérifier $(*)$ est laissé en exercice.

(3) Sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur $\mathbb{C}^n$), trois distances différentes sont particulièrement appréciées : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$,

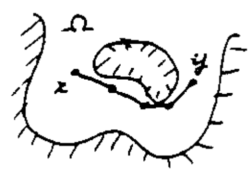
$$d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

$$d_2(x,y) = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\Big)^{1/2} \quad \text{(c'est la distance euclidienne } d\text{)}$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|$$

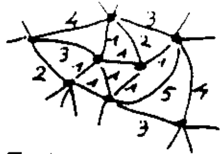
(Les notations viennent de ce que, plus généralement pour tout $p \geq 1$, $d_p(x,y) = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\Big)^{1/p}$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, et que $d_p(x,y) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sup_j |x_j - y_j|$. L'inégalité triangulaire, facile pour $p = 1, 2, \infty$, sera démontrée pour tout $p \in [1, \infty]$ au chapitre III)

(4) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs. On peut en faire un espace



métrique en le munissant de la "distance géodésique" : $d'(x,y)$ = l'infimum des longueurs (euclidiennes) des lignes brisées joignant x à y sans sortir de Ω. Qu'il en existe est laissé en exercice, de même que la vérification de l'inégalité triangulaire.

(5) La "distance sur route" entre deux noeuds d'un réseau routier a une définition évidente....



(6) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs complexes. Par analogie à l'exemple (3) on posera, pour $f, g \in E$

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \ , \quad d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|,$$

et plus généralement pour tout $p \geq 1$, $d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$

L'inégalité triangulaire est facile pour $p = 1, 2, \infty$, et sera démontrée en général au chapitre III, de même que $d_p(f,g) \xrightarrow[p\to\infty]{} d_\infty(f,g)$.

(7) Toute partie d'un espace métrique est un espace métrique, muni de la distance restreinte.

(8) Si d est une distance sur E, $d' = \frac{d}{1+d}$ et $d'' = \operatorname{Th} d$ aussi

Preuve: dans chaque cas, seule l'inégalité triangulaire n'est pas claire, mais

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) + d(x,y)d(y,z)[2 + d(x,z)]$$

$$\Leftrightarrow d(x,z)[1 + d(x,y) + d(y,z) + d(x,y)d(y,z)] \leq [d(x,y) + d(y,z) + 2d(x,y)d(y,z)](1 + d(x,z))$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

et $\operatorname{Th} d(x,z) \leq \operatorname{Th}[d(x,y)+d(y,z)] = \dfrac{\operatorname{Th} d(x,y) + \operatorname{Th} d(y,z)}{1 + \operatorname{Th} d(x,y)\,\operatorname{Th} d(y,z)} \leq \operatorname{Th} d(x,y) + \operatorname{Th} d(y,z)$. ∎

L'intérêt de cette remarque est que d', d'' sont bornées (à valeurs dans $[0,1[$.)

2- Si (E,d) est un espace métrique, on définit pour $a \in E$ et $r > 0$

- la boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$
- la boule fermée " " : $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leq r\}$
- la sphère " " : $S(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$
- les ouverts de E, comme les parties de E qui avec chaque point a, contiennent une boule ouverte de centre a et de rayon >0 ; cette famille est clairement stable par réunions et par intersections finies, et définit donc une topologie sur E, "associée" à la distance d.

Ainsi tout espace métrique est un espace topologique, qui est de plus séparé :

Preuve: Si $a, b \in E$, $a \neq b \Rightarrow d(a,b) = r > 0$. Alors $B(a, \frac{r}{3})$ et $B(b, \frac{r}{3})$ sont des voisinages ouverts de a et b respectivement, disjoints d'après l'inégalité triangulaire. ∎

En particulier, toutes les notions de topologie et résultats du chapitre I s'appliquent aux espaces métriques. Sans les rappeler, on se contentera ici de remarquer quelques particularités des espaces métriques:

Remarques: • Un point a d'un espace métrique E est adhérent à une partie $P \subset E$ si et seulement s'il est la limite d'une suite de points de P:
$\exists (a_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $a_p \in P$ et $a_p \xrightarrow[p\to\infty]{} a$ (c'est-à-dire $d(a_p,a) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$).
Preuve: les boules $B(a, \frac{1}{p})$ rencontrent P, et tout voisinage de a contient une telle boule. ∎

• Un point a de E (métrique) est un point d'accumulation d'une partie $P \subset E$ si et seulement si c'est la limite d'une suite de points de P, tous distincts et $\neq a$.
Preuve: exercice ; a est alors le seul point adhérent à $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$. ∎

• Il ne faut pas croire que les compacts d'un espace métrique sont ses fermés bornés : c'est vrai pour $\mathbb{R}^n$, ses ouverts et ses fermés, munis de la distance euclidienne d, mais pas s'ils sont munis de $d' = \frac{d}{1+d}$ par exemple, puisqu'alors toute partie est bornée, alors que $\mathbb{R}$ par exemple n'est pas compact, puisque la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de point d'accumulation.

Mais <u>les compacts sont fermés</u> (proposition I.B.1), et <u>bornés</u> (comme dans la remarque I.B.2).

Rappelons aussi ici que <u>de toute suite de points d'un compact on peut extraire une sous-suite convergente</u> (cf. I.B.4), et insistons sur le fait que pour un espace métrique, la <u>réciproque est vraie aussi</u> : autrement dit la proposition I.B.4 reste vraie pour toute partie K d'un espace métrique.

Preuve de la réciproque : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. Montrons d'abord qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de centre $x \in K$ et de rayon ε soit contenue dans l'un des U_i. Sinon il existerait une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K tels que $B(a_p, \frac{1}{p})$ ne soit contenue dans aucun U_i, puis $a \in K$ adhérent à $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$. Comme $a \in K$, $a \in U_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$, donc $B(a, \frac{1}{N}) \subset U_{i_0}$ pour un entier N assez grand, et il existe $p \geq 2N$ tel que $a_p \in B(a, \frac{1}{2N})$, d'où $B(a_p, \frac{1}{p}) \subset B(a_p, \frac{1}{2N}) \subset B(a, \frac{1}{N}) \subset U_{i_0}$, contrairement à l'hypothèse.

Il reste à montrer que K peut être couvert par un nombre fini de boules $B(a_j, \varepsilon)$ ($j = 1, \dots, p$; $a_j \in K$). Choisissons par récurrence $a_{p+1} \in K - \bigcup_{j=1}^{p} B(a_j, \varepsilon)$, tant que ce fermé de K n'est pas vide ; s'il l'est au cran p, c'est fini ; sinon on construirait ainsi toute une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K deux à deux distants d'au moins $\varepsilon > 0$, donc sans point d'accumulation, ce qui est exclu. ■

- Insistons ici aussi sur le fait qu'un espace métrique n'est pas toujours normal, ni localement compact en général. Toutefois il est clairement localement compact dès que ses boules fermées sont compactes (au moins celles de rayon assez petit). C'est le cas de $\mathbb{R}^n$, mais ce n'est pas toujours vrai. C'est faux par exemple pour les espaces de l'exemple (6) du 1 (exercices).

3 - On dit que deux distances d et d' sur le même ensemble E sont <u>équivalentes</u> s'il existe $A, B > 0$ tels que

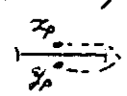
$$\forall x,y \in E \quad A\cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq B\cdot d(x,y)$$

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur E. De plus :

<u>Proposition</u> : <u>Deux distances équivalentes définissent la même topologie</u>

Preuve : Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, $B_d(a,r) \supset B_{d'}(a, Ar)$ et $B_{d'}(a,r) \supset B_d(a, \frac{r}{B})$. ■

<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse : par exemple sur $\mathbb{R}^n$, la distance euclidienne d, et $d' = \frac{d}{1+d}$ définissent la même topologie, mais ne sont pas équivalentes (exercice). Ou encore sur $\mathbb{R}^2$ privé d'un segment de longueur ℓ, la distance euclidienne et la distance géodésique d' (cf. 1, exemple (4)) définissent clairement la même topologie, sans être équivalentes : si "x_p et y_p tendent vers le milieu du segment de part et d'autre" (cf. figure), $d(x_p, y_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tandis que $d'(x_p, y_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.



<u>Exemple</u> Pour $x, y \in \mathbb{C}^n$ et avec les notations de 1, exemple (3), on a

$$\underline{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\cdot d_\infty(x,y)}$$

Preuve : exercice. ■ En particulier d_1, d_2, d_∞ sont équivalentes

---

(B) COMPLÉTUDE

1- On dit qu'une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points d'un espace métrique (E,d) est "de Cauchy" si : $\forall \varepsilon>0\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \forall p,q>p_0\ \ d(x_p,x_q)<\varepsilon$.

On dit qu'elle est convergente vers $x\in E$, ou que x est sa limite si
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists p_0\in\mathbb{N}\ \ \forall p>p_0\ \ d(x_p,x)<\varepsilon \quad (\text{on note } x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} x)$$
Visiblement une suite convergente est de Cauchy :

Si $x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} x$, pour $\varepsilon>0$, il existe p_0 tel que dès que $p>p_0$ $d(x_p,x)<\frac{\varepsilon}{2}$, et si $p,q>p_0$, $d(x_p,x_q)\le d(x_p,x)+d(x,x_q)<\varepsilon$. ■

On dit que (E,d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Exemples : • $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, munis de la distance euclidienne, sont complets (c'est en fait la définition même de $\mathbb{R}$), mais $\mathbb{Q}$ ne l'est pas (considérer une suite de rationnels tendant dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$).

• Si (E,d) est complet et d' est équivalente à d, (E,d') est complet.

• L'espace E de l'exemple 1.(6) des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, muni de la distance d_∞ est complet : Si $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente vers $f(x)\in\mathbb{C}$, et $f_p\to f$ uniformément sur $[a,b]$. Comme une limite uniforme de fonctions continues est continue, $f\in E$, et $f_p\to f$ dans (E,d).

Par contre (E,d_1) par exemple n'est pas complet (exercice), ni aucun (E,d_p) pour $p\in[1,+\infty[$.

2- Proposition : Soit $F\subset E$ (métrique)

(a) Si F est compact, F est complet

(b) Si F est complet, F est fermé

(c) Réciproquement si E est complet et F est fermé, F est complet.

Preuve : (a) Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de F, on peut en extraire une sous-suite $(a_{p_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $a\in F$. Mais alors $a_p \xrightarrow[p\to\infty]{} a$, puisque $d(a_p,a)\le d(a_p,a_{p_j})+d(a_{p_j},a)$ est arbitrairement petit pour p et j assez grands. ■

(b) Si $a\in\overline{F}$, il existe une suite (a_p) de points de F tendant vers a ; étant convergente, elle est de Cauchy, donc il existe $b\in F$ tel que $a_p\to b$, et $d(a,b)\le d(a,a_p)+d(a_p,b)<2\varepsilon$ pour p assez grand, autrement dit $d(a,b)=0$, et $a=b\in F$; finalement $\overline{F}=F$.

(c) Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de F, elle est convergente dans E, vers $a\in E$; a est adhérent à $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}\subset F$, donc $a\in\overline{F}=F$, et $a_p \xrightarrow[p\to\infty]{} a$ dans F. ■

3- Théorème : Pour une partie K d'un espace métrique E, sont équivalents :

(a) K est compact

(b) K est complet, et de plus, pour tout $\varepsilon>0$ on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon ε.

Preuve : (a)⇒(b) : si K est compact, il est complet par la proposition 2 (a). De plus il est recouvert par $(B(x,\varepsilon))_{x\in K}$, donc par un nombre fini de ces boules.

(b)$\Rightarrow$(a) : Par l'avant-dernière remarque de A.2, il suffit de montrer que de toute suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K. On peut supposer les x_p tous distincts.

On recouvre K par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$; l'une d'elles contient une infinité de x_p ; on ne garde que ceux-là, d'où une suite extraite $(x_p^0)_{p\in\mathbb{N}}$ dont tous les points sont distants de moins de 1.
On recommence avec des boules de rayon $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^q}, \dots$ D'où une suite de suites, chacune extraite de la précédente, $(x_p^0)_{p\in\mathbb{N}}, (x_p^1)_{p\in\mathbb{N}}, \dots, (x_p^q)_{p\in\mathbb{N}}, \dots$ et telles que les points de $(x_p^q)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distants de moins de $\frac{1}{2^q}$.
La suite "diagonale" $(x_p^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors clairement de Cauchy, donc convergente vers $x\in K$, puisque K est complet. ∎

<u>Corollaire</u> : <u>Pour une partie P d'un espace métrique complet E, sont équivalents</u> :
(a) <u>$\overline{P}$ est compact</u>
(b) <u>Pour tout $\varepsilon>0$, on peut recouvrir P par un nombre fini de boules de rayon ε</u>
<u>(On dit alors que P est relativement compact)</u>

Preuve : (a)$\Rightarrow$(b) clairement par le théorème précédent (on peut même recouvrir $\overline{P}$)
(b)$\Rightarrow$(a) : il suffit de remarquer qu'on peut recouvrir P par un nombre fini de boules <u>fermées</u> $(\overline{B}_j)_{j=1,\dots,p_\varepsilon}$ de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ arbitrairement petit, d'où $\overline{P}\subset\bigcup\overline{B}_j$, et $\overline{P}$ est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε arbitraire. De plus $\overline{P}$ est fermé dans E complet, donc complet (prop. 2(c)), et on applique le théorème précédent. ∎

4 - <u>Remarque-exercices</u> Soit $(E_i, d_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille finie d'espaces métriques. On peut munir le produit $E=\prod_{i=1}^{p}E_i$ d'une structure métrique, pour la distance : $d((x_i),(y_i))=\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i)$, ou toute autre distance équivalente. C'est d'ailleurs en ce sens que $\mathbb{R}^n$ est "l'espace métrique produit" $\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}$ (mais muni de la distance "euclidienne" d_2 plus souvent que de d_1 ; voir A.3 pour l'équivalence).

Si la métrique d'un tel espace-produit est un peu flottante, la topologie en est bien définie (prop. A.3), et même mieux : <u>les suites de Cauchy sont les mêmes pour deux distances équivalentes</u> (c'est clair), ce qui permet d'énoncer :
<u>Si tous les E_i sont complets</u>, $E=\prod_{i=1}^{p}E_i$ <u>est complet</u>
Preuve : Les projections d'une suite de Cauchy sont de Cauchy... ∎

Remarquons aussi que la topologie de l'espace métrique produit est bien la topologie produit.

Tout ceci se généralise dans une certaine mesure à un produit infini <u>dénombrable</u> $E=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, où (E_i,d_i) est un espace métrique pour tout $i\in\mathbb{N}$:
On peut définir une distance d sur E en posant $d((x_i),(y_i))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$
Passer de d_i à $\frac{d_i}{1+d_i}$ ne change pas la topologie des E_i (remarque A.3), et la série écrite est alors convergente ; l'inégalité triangulaire est claire.

De plus, on peut encore (et par les mêmes arguments) vérifier que E est complet si les E_i le sont ($i \in \mathbb{N}$). Enfin la topologie de E associée à cette distance n'est autre que la topologie produit (exercice).

5- On appelle diamètre $\delta(P)$ d'une partie bornée P d'un espace métrique le nombre (fini) $\sup_{x,y \in P} d(x,y)$.

Théorème : Soit E un espace métrique complet, et $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés bornés non vides. Si $\delta(F_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, l'intersection des F_p se compose exactement d'un point.

Preuve : Si $F = \bigcap_{p=1}^{\infty} F_p$, $\delta(F) \leq \delta(F_p)$ pour tout p, donc $\delta(F) = 0$ et $F = \emptyset$ ou $F = \{a\}$ ($a \in E$). Choisissons $a_p \in F_p$. La suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est clairement de Cauchy, donc convergente dans E vers un point $a \in E$. Mais $a_p \in F_{p_0}$ dès que $p > p_0$, donc $a \in \overline{F}_{p_0} = F_{p_0}$, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$. Donc $a \in F$. ■

6- On dit qu'une partie P d'un espace topologique E est dense dans E si $\overline{P} = E$.

Proposition : Soit E un espace métrique complet, et $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Alors $U = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} U_p$ est dense dans E. (en particulier non vide, si $E \neq \emptyset$)

Preuve : Il faut montrer que U rencontre toute boule ouverte B de rayon > 0. Or $B \cap U_1$ est un ouvert non vide, donc contient une boule fermée $\overline{B}(x_1, r_1)$, avec $r_1 \leq \frac{1}{4}$; puis $B(x_1, r_1) \cap U_2$ contient $\overline{B}(x_2, r_2)$ avec $r_2 \leq \frac{1}{8}$, ... On construit ainsi une suite de boules fermées $\overline{B}_p = \overline{B}(x_p, r_p)$ telles que $\overline{B}_p \subset U_p$, $B \supset \overline{B}_1 \supset \dots \supset \overline{B}_p \supset \overline{B}_{p+1} \supset \dots$, et $\delta(\overline{B}_p) = \frac{1}{2^p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$. Par le théorème il existe $a \in E$ tel que $\{a\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{B}_p$, et clairement $a \in B \cap U \neq \emptyset$. ■

Remarque : Cet énoncé, dû à Baire(*), est la clef d'une série d'énoncés bien utiles, qu'on cite sous le nom de "théorèmes de Baire", et dont on va donner les premiers exemples.

On dit qu'une partie P d'un espace topologique E est rare (en anglais : "non-dense") si le complémentaire de $\overline{P}$ est dense. On dit qu'une partie Q de E est maigre s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rares (en anglais Q est "of the first Baire category", et une partie est "of the second Baire category" si elle n'est pas maigre)

La proposition précédente implique alors :

Corollaire ("Théorème de Baire"-1) : Un espace métrique complet non vide n'est pas maigre.

Preuve : Sinon $E \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p$, où les F_p sont des fermés rares, donc $U_p = \complement F_p$ est un ouvert dense, et $U = \bigcap U_p = \emptyset$, ce qui contredit sa densité. ■

7- A vrai dire, on peut remplacer dans les idées ci-dessus les arguments de complétude par des arguments de compacité :

(*) René Louis Baire, 1874-1932.

Lemme: Soit E un espace topologique compact. Pour tout ouvert non vide U de E, il existe un ouvert non vide V tel que $\overline{V} \subset U$.

Preuve: soit $a \in U$ et $F = \complement U$. Il existe des voisinages ouverts disjoints V et W respectifs des fermés disjoints $\{a\}$ et F (proposition I.B.5); V est non vide ($V \ni a$), et $\overline{V} \subset \complement W \subset U$. ■

Théorème ("de Baire"-2): Le complémentaire d'une partie P maigre d'un espace topologique compact E est dense dans E.

Preuve: Soit V un ouvert non vide de E, et $P \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$, où les F_p sont des fermés rares, donc $U_p = \complement \overline{F_p}$ est un ouvert dense. Soit V_1 un ouvert non vide tel que $\overline{V_1} \subset U_1 \cap V$, qui est un ouvert non vide (V_1 est donné par le lemme), puis V_2 tel que $\overline{V_2} \subset U_2 \cap V_1$, --- On construit ainsi une suite d'ouverts $(V_p)_{p\in\mathbb{N}}$ non vides et tels que $\overline{V_{p+1}} \subset U_{p+1} \cap V_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme la suite $\{\overline{V_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, ses intersections finies sont non vides; comme E est compact $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{V_p}$ est non vide, et contient un point $a \in E$. Visiblement $a \in V \cap (\bigcap_{p\in\mathbb{N}} U_p) \subset V \cap \complement P$. Donc $\complement P$ rencontre tout ouvert non vide. ■

8- Voici encore une autre variante, remarquable, des mêmes idées:

Théorème ("de Baire"-3): Soit $(f_p : E \to \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un espace topologique E. Supposons qu'elle soit "simplement" convergente: $\forall x \in E$, $f_p(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(x)$, pour un certain $f(x) \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points où $f : E \to \mathbb{R}$ n'est pas continue est une partie maigre de E.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, et $p \in \mathbb{N}$ posons $Q_p(\varepsilon) = \{x \in E \mid |f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}$, $U(\varepsilon) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathring{Q}_p(\varepsilon)$, et $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U(\frac{1}{n})$. On va d'abord montrer que P est l'ensemble des points de E où f est continue.

– si f est continue en $x_0 \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x_0) - f_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, puis un voisinage ouvert U_0 de x_0 tel que $x \in U_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_p(x) - f_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, d'où $|f_p(x) - f(x)| < \varepsilon$, donc $U_0 \subset Q_p(\varepsilon)$, et U_0 étant ouvert, $U_0 \subset \mathring{Q}_p(\varepsilon) \subset U(\varepsilon)$. Comme ε est arbitraire, $x_0 \in P$.

– Réciproquement si $x_0 \in P$, pour tout $\varepsilon > 0$, $x_0 \in U(\frac{\varepsilon}{3})$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \mathring{Q}_p(\frac{\varepsilon}{3})$, donc un voisinage ouvert U_0 de x_0 contenu dans $\mathring{Q}_p(\frac{\varepsilon}{3})$, c'est-à-dire tel que $|f(x) - f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $x \in U_0$. Comme ε est arbitraire et les f_p sont continues (p dépend de ε), la même majoration que ci-dessus montre que f est continue en x_0.

Posons maintenant $F_p(\varepsilon) = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N}, |f_p(x) - f_{p+k}(x)| \leq \varepsilon\}$. Les f_p étant continues, $F_p(\varepsilon)$ est fermé, et $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p(\varepsilon) = E$ par hypothèse; de plus $F_p(\varepsilon) \subset Q_p(\varepsilon)$, donc $\mathring{F}_p(\varepsilon) \subset \mathring{Q}_p(\varepsilon)$ et par suite $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathring{F}_p(\varepsilon) \subset U(\varepsilon)$.
Les $\partial F_p(\varepsilon)$ sont rares (comme n'importe quelle frontière de fermé ou d'ouvert!); donc $\complement U(\varepsilon) \subset \complement\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathring{F}_p(\varepsilon)\right) = \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p(\varepsilon)\right) - \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathring{F}_p(\varepsilon)\right) \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \partial F_p(\varepsilon)$ est maigre, et donc aussi $\complement P = \complement\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U(\frac{1}{n})\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\complement U(\frac{1}{n})\right)$. ■

(C) DIVERSES NOTIONS DE CONTINUITÉ

1- Pour une application $f : E \to F$ entre espaces métriques, être <u>continue au point $a \in E$</u> s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0, \forall x \in E \quad d(a,x) < \alpha \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

(on note d la distance de tout espace métrique, tant qu'aucune confusion n'est possible), et on dit que f est <u>continue</u> si elle l'est en tout point.
Le α de la définition dépend de ε, et de a ; s'il est indépendant de a :

On dit que f est <u>uniformément continue</u> (sur E) si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0, \ \forall x, y \in E \quad d(x,y) < \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Enfin, si on peut choisir α proportionnel à ε, on obtient :

On dit que f est <u>lipschitzienne de rapport $\lambda \geq 0$</u> sur E, si

$$\forall x, y \in E \qquad d(f(x), f(y)) \leq \lambda \, d(x,y)$$

Clairement donc : <u>f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue</u> (sur E)
Mais les réciproques sont fausses : par exemple des deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{|x|}$, la première est continue, mais pas uniformément continue, la deuxième uniformément continue, mais pas lipschitzienne.
D'où l'intérêt du résultat suivant :

2- <u>Théorème de Heine</u> : <u>Si K est un compact de E, et $f : E \to F$ est continue, $f|_K$ est uniformément continue. (E, F métriques)</u>

Preuve : Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de points de K telles que $d(x_p, y_p) < \frac{1}{p}$ et $d(f(x_p), f(y_p)) > \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par I B 5 on peut trouver une sous-suite $(x_{p_q})_{q \in \mathbb{N}}$ de la première convergente vers $x \in K$, et on peut supposer $p_q \xrightarrow[q \to \infty]{} \infty$. Comme f est continue en $x \in K$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $y \in K$, $d(x,y) < \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$; et il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq q_0 \Rightarrow \frac{1}{p_q} < \frac{\alpha}{2}$ et $d(x, x_{p_q}) < \frac{\alpha}{2}$; d'où $d(x, y_{p_q}) \leq d(x, x_{p_q}) + d(x_{p_q}, y_{p_q}) < \alpha$, puis $d(f(x_{p_q}), f(y_{p_q})) \leq d(f(x_{p_q}), f(x)) + d(f(x), f(y_{p_q})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, contrairement à l'hypothèse. ■

<u>Remarque</u> : Par contre f n'est pas toujours lipschitzienne : par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

3- Chacune des trois notions ci-dessus est stable par composition :

<u>Proposition</u> : <u>Soient E, F, G trois espaces métriques, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Alors :</u>

(a) <u>Si $a \in E$, f est continue en a, et g est continue en $f(a)$, $g \circ f$ est continue en a</u>
(b) <u>Si f et g sont continues, $g \circ f$ est continue.</u>
(c) <u>Si f et g sont uniformément continues, $g \circ f$ est uniformément continue</u>
(d) <u>Si f et g sont lipschitziennes de rapports λ et μ, $g \circ f$ est lipschitzienne de rapport $\lambda\mu$.</u>

Preuve : (a) et (b) sont déjà connus (I.E.2), et dans tous les cas, il suffit de "composer" les définitions. ■

En composant alors une application f d'un espace métrique E à valeurs dans un espace-produit $F = \prod_{j=1}^{n} F_j$ d'espaces métriques (cf. II.B.4) avec les projections $\pi_j : F \to F_j$, définies par $\pi_j(y_1, \dots, y_n) = y_j$ $(y_j \in F_j)$ il vient aussitôt :

<u>Corollaire : Pour que $f : E \to F = \prod_{j=1}^{n} F_j$ soit continue au point $a \in E$, (respectivement : continue, uniformément continue, lipschitzienne), il faut et il suffit que chacune des $\pi_j \circ f = f_j$ ait la même propriété</u> $(j = 1, \dots, n)$.

Par exemple si $f : E \to \mathbb{R}^n$ et si l'on note $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, on obtient que f est continue en a, continue, uniformément continue, ou lipschitzienne si et seulement si les f_j le sont pour $j = 1, \dots, n$.

Ceci permet de ramener l'étude de beaucoup de questions sur des "fonctions à valeurs vectorielles" au cas des fonctions "numériques", pour lesquelles on dispose de résultats plus précis, par exemple :

<u>Proposition : Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un espace métrique E, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors fg et $\lambda f + \mu g$, $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$, sont continues, de même que $\frac{1}{f}$, si f ne s'annule pas sur E.</u>

Preuve : Exercice. ■

4 - <u>Remarque</u> : On obtiendrait évidemment un énoncé analogue au corollaire ci-dessus, pour une application $f : E \to F$, lorsque E est une <u>somme disjointe</u> $E = \coprod_{j=1}^{n} E_j$ (cf. I.F.3 ; il faut munir E d'une métrique...), en la composant avec les injections canoniques $E_j \hookrightarrow E$; mais <u>pas</u> quand E est un produit, comme par exemple $\mathbb{R}^n$: il ne suffit déjà <u>pas</u>, pour qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de plusieurs variables soit continue, que les "fonctions partielles" (obtenues en fixant toutes les variables sauf une) le soient. Ainsi :

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par la dernière proposition ci-dessus, et "séparément continue" en $(0,0)$ (les fonctions partielles sont nulles), mais pourtant pas continue en ce point, puisque $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ prend n'importe quelle valeur de $[-1,1]$ dans tout voisinage de $(0,0)$. ■

5 - <u>Remarque</u> : Dans le cas métrique, la continuité "se lit sur les suites" :

<u>Proposition : Soient E, F des espaces métriques : $f : E \to F$ une application, et $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :</u>

(a) <u>f est continue au point x</u>

(b) <u>Pour toute suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de points de E, tendant vers x, $f(x_p)$ tend vers $f(x)$ (quand $p \to +\infty$).</u>

Preuve : (a) ⇒ (b) est vrai même si E et F sont des espaces topologiques quelconques : c'est en effet une conséquence de la proposition I.E.1 ((a) ⇒ (d)), et on l'a déjà utilisée. C'est la réciproque qui est ici nouvelle :

(b) $\Rightarrow$ (a) : Si f n'était pas continue en x, il existerait $\varepsilon > 0$ et une suite de points $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de E telle que $d(x, x_p) < \frac{1}{p}$ et $d(f(x), f(x_p)) > \varepsilon$, ce qui signifie $x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} x$, sans que $f(x_p)$ tende vers $f(x)$. ∎

(En réalité, ce n'est pas la métrique qu'on utilise essentiellement dans la réciproque, mais le fait que x a une "base dénombrable de voisinages" : il existe une famille dénombrable (V_p) de voisinages de x telle que tout voisinage de x contient l'un des V_p ; dans le cas métrique, les boules $B(x, \frac{1}{p})$ font l'affaire, mais le phénomène est (un peu) plus général.)

6 - Nous achevons ce paragraphe par le "théorème du point fixe pour une application contractante", résultat aussi simple qu'important. On ne développera pas ici ses nombreuses applications en analyse (cf. l'introduction).

Une application lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$ est dite "contractante".

Théorème : Soit E un espace métrique complet, et $f : E \to E$ contractante. Alors
(a) il existe un et un seul point $a \in E$ tel que $f(a) = a$.
(b) quel que soit $a_0 \in E$, poser $a_{p+1} = f(a_p)$ définit par récurrence une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de E, convergente vers a.

Preuve : • Si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda\, d(a,b)$ avec $\lambda < 1$, d'où $d(a,b) = 0$, et $a = b$.
• $d(a_{p+1}, a_p) = d(f(a_p), f(a_{p-1})) \leq \lambda\, d(a_p, a_{p-1}) \leq \dots \leq \lambda^p d(a_1, a_0)$ pour $p \in \mathbb{N}$, donc dès que $p \geq q \geq N$,

$$d(a_p, a_q) \leq d(a_p, a_{p-1}) + \dots + d(a_{q+1}, a_q) \leq \lambda^q (1 + \dots + \lambda^{p-q-1}) d(a_1, a_0)$$
$$= \lambda^q \frac{(1-\lambda^{p-q})}{1-\lambda}\, d(a_1, a_0) \leq \left(\frac{d(a_1, a_0)}{1-\lambda}\right) \lambda^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

et la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers $a \in E$.
Comme $|f(a_p) - f(a)| \leq \lambda |a_p - a|$, $f(a_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(a)$, et $a_{p+1} \xrightarrow[p\to\infty]{} a$; comme $a_{p+1} = f(a_p)$, il vient $a = f(a)$. ∎

(D) LA FONCTION DISTANCE

1 - Soit E un espace métrique, et $a \in E$. La fonction $x \mapsto d(a,x)$ de E dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport 1, par l'inégalité triangulaire.
Pour $P \subset E$ non vide et $x \in E$, on appelle distance de x à P et on note $d(x,P)$ le nombre $d(x,P) = \inf_{y\in P} d(x,y) \geq 0$. On a :

Proposition : (a) $d(x,P) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{P}$, et $d(x,P) = d(x,\overline{P})$ pour tout $x \in E$, $P \subset E$.
(b) La fonction $x \mapsto d(x,P)$ est lipschitzienne de rapport 1
(c) Si P est compact, $d(x,P)$ est atteint : $\exists y_0 \in P$, $d(x,P) = d(x,y_0)$
(d) Si P est fermé, et que les boules fermées de E sont compactes, $d(x,P)$ est atteint.

Preuve : (a) $d(x,P) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \cap P \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{P}$. On a $d(x,\overline{P}) \leq d(x,P)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \overline{P}$ tel que $d(x,y) < d(x,\overline{P}) + \varepsilon$, puis $z \in P$ tel que $d(y,z) < \varepsilon$, d'où $d(x,P) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,\overline{P}) + 2\varepsilon$ - Comme ε est arbitraire, $d(x,P) \leq d(x,\overline{P})$, d'où $d(x,P) = d(x,\overline{P})$.
(b) Si $x, y \in E$, il existe $z \in P$ tel que $d(y,z) \leq d(y,P) + \varepsilon$, d'où
$d(x,P) - d(y,P) \leq d(x,z) - (d(y,z) - \varepsilon) \leq d(x,y) + \varepsilon$ par l'inégalité triangulaire ;

comme ε est arbitraire, $d(x,P) - d(y,P) \leq d(x,y)$. On conclut en échangeant les rôles de x et y, que $|d(x,P) - d(y,P)| \leq d(x,y)$, soit (b).

(c) Par le (b), $d(x,P)$ est continue ; on conclut par le corollaire I.E.3.

(d) Si P est fermé non vide, soit $y_0 \in P$ et $r = d(x,y_0)$, puis $K = P \cap \bar{B}(x,r)$. K est un compact non vide de E, et pour $y \in P - K$, $d(x,y) > r = d(x,y_0) \geq d(x,P)$. Donc $d(x,P) = \inf_{y \in P} d(x,y) = \inf_{y \in K} d(x,y) = d(x,K)$, et on conclut par (c). ■

Le (d) s'applique en particulier au cas $E = \mathbb{R}^n$.

En fait $d(\ )$ bicontinue ! $d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y')$

2 - Pour deux parties non vides P, Q, appelons de même <u>distance</u> de P à Q le nombre $d(P,Q) = \inf_{x \in P,\, y \in Q} d(x,y) \quad (= d(\bar{P}, \bar{Q}))$

<u>Proposition</u> : <u>Si K est compact et F est fermé (non vides), $K \cap F = \emptyset \Rightarrow d(K,F) > 0$</u>

Preuve : La fonction $x \mapsto d(x,F)$ de K dans $\mathbb{R}$ est continue (prop. 1, (b)), et partout strictement positive, puisque $K \cap F = \emptyset$ et que F est fermé (prop. 1, (a)). Comme K est compact, elle atteint son infimum (I.E.3) en $x_0 \in K$, et $d(K,F) = \inf_{x \in K} d(x,F) = d(x_0,F) > 0$. ■

<u>Corollaire</u> : <u>Sous les mêmes hypothèses, il existe une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$ pour $x \in K$, $f(x) = 1$ pour $x \in F$.</u>

Preuve : Si $a = d(K,F) > 0$, il suffit de poser $f(x) = \frac{1}{a} \inf(a, d(x,K))$, qui est une fonction continue par la dernière proposition de C.3. ■

<u>Corollaire</u> : <u>Sous les mêmes hypothèses, il existe des voisinages ouverts V de K et W de F disjoints</u>

Preuve : il suffit de poser par exemple $V = \{x \in E \mid f(x) < \frac{1}{3}\}$ et $W = \{x \in E \mid f(x) > \frac{2}{3}\}$, où f est la fonction du corollaire précédent. ■

<u>Remarques</u> • Le dernier énoncé est plus faible que la propriété de "<u>normalité</u>" étudiée au I.B.5.

• Pour $P \subset E$, posons $P_\varepsilon = \{x \in E \mid d(x,P) < \varepsilon\}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, <u>P_ε est un voisinage ouvert de P</u>. (puisque $d(x,P)$ est continue).

3 - Dans ce numéro, E est un espace métrique dont <u>les boules fermées sont supposées compactes</u> (par exemple $\mathbb{R}^n$!)

Dans un tel espace, <u>les compacts sont les fermés bornés</u> (cf remarques A.2, et prop. I.B.1 pour la réciproque). En particulier :

<u>Proposition</u> : <u>Avec la notation de la remarque précédente,</u>
<u>K compact $\Rightarrow \bar{K_\varepsilon}$ compact, et $\bar{K_\varepsilon} \subset \{x \in E \mid d(x,K) \leq \varepsilon\}$</u>

Preuve : L'ensemble $\{x \in E \mid d(x,K) \leq \varepsilon\}$ est fermé par la continuité de $x \mapsto d(x,K)$. Comme il contient K_ε, il contient aussi $\bar{K_\varepsilon}$. Comme K est borné, il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que $K \subset B(a,r)$, d'où $\bar{K_\varepsilon} \subset B(a, r+\varepsilon)$ par l'inégalité triangulaire, et c'est donc un fermé borné. ■

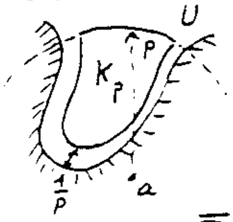
<u>Corollaire</u> : <u>Soit U un ouvert de E et K un compact de U. Il existe un voisinage compact K' de K contenu dans U.</u>

Preuve. $F = \complement U$ est fermé et $K \cap F = \emptyset$. Par la proposition 2, $d(K,F) = a > 0$. Il suffit alors de choisir $K' = \bar{K}_{\frac{a}{2}}$. ■

On appelle <u>suite exhaustive</u> de compacts d'un espace topologique F une suite $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de compacts de F telle que tout compact K de F soit contenu dans l'un des K_p. En particulier $F = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} K_p$, et on peut supposer une telle suite croissante, quitte à remplacer K_p par $\bigcup_{q\leq p} K_q$, qui est encore compact.

<u>Théorème : E (métrique à boules fermées compactes) admet une suite exhaustive de compacts ; il en est de même de tout ouvert de E</u>

Preuve :



Pour E, il suffit de choisir $a\in E$ et de poser $K_p = \overline{B}(a,p)$, puisque tout compact est borné, donc contenu dans une de ces boules.

Si U est un autre ouvert de E, $F = \complement U$ est non vide, et on peut poser $K_p = \overline{B}(a,p) \cap F_p$, où $F_p = \{x\in U \mid d(x,F) \geq \frac{1}{p}\}$. F_p est un fermé de U par continuité de la distance. Comme $\overline{F_p} \cap F = \emptyset$, F_p est fermé dans E, et K_p est fermé dans le compact $\overline{B}(a,p)$, donc compact dans E, et contenu dans U, donc compact dans U. Si K est un compact de U, il est compact dans E, donc borné et il existe $p_1\in\mathbb{N}$ tel que $K\subset \overline{B}(a,p_1)$. De plus $d(K,F)>0$ et il existe $p_2\in\mathbb{N}$ tel que $d(K,F) > \frac{1}{p_2}$. Pour $p \geq \sup(p_1,p_2)$, on a $K\subset K_p$. ∎

<u>Remarque</u> : Les suites F_p, $\overline{B}(a,p)$, K_p sont croissantes.

4 - Le premier corollaire de 2 a des analogues dans des contextes plus généraux (non forcément métriques). Le plus est le théorème classique suivant :

<u>Théorème d'Urysohn : Soit E un espace topologique normal (cf. I.B.5), et F, G des fermés disjoints de E. Il existe une fonction continue $f : E\to\mathbb{R}$ telle que $0\leq f(x)\leq 1$ pour $x\in E$, $f(x)=0$ pour $x\in F$, $f(x)=1$ pour $x\in G$.</u>

Preuve : A tout rationnel r de la forme $r=\frac{i}{2^n}$, avec $i=0,1,\dots 2^n$ et $n\in\mathbb{N}$, on associe un ouvert $U(r)$ tel que

(*) $\overline{U(r)}\subset U(r')$ dès que $r<r'$, et $F\subset U(0)$, $G = \complement U(1)$

On construit les $U(r)$ par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. Pour $n=0$, comme E est normal, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F\subset U$ et $G\subset V$; on pose $U(0)=U$, et $U(1)=\complement G$. Supposons avoir construit des $U(r)$ vérifiant (*) pour tout $r=\frac{i}{2^{n-1}}$ $(0\leq i\leq 2^{n-1})$ et soit i un entier impair de $\{1,3,\dots,2^n-1\}$; si $\frac{i-1}{2}=j$, on a $\overline{U\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)}\subset U\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)$, et comme E est normal, il existe des ouverts disjoints U', V' tels que $\overline{U\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)} = \overline{U\left(\frac{i-1}{2^n}\right)}\subset U'$ et $\complement V'\subset U\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right) = U\left(\frac{i+1}{2^n}\right)$; on pose $U\left(\frac{i}{2^n}\right)=U'$; (*) se déduit de $\complement\overline{U'}\subset\complement V'$.

On définit ensuite la fonction f par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in U(0) \,;\ 1 \text{ si } x\in\complement U(1) \,; \\ \sup_{x\in U(r)} r & \text{dans tout autre cas}\end{cases}$

On a bien $f|_F\equiv 0$, $f|_G\equiv 1$, et si $x_0\in E$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, soit r un rationnel de la forme précédente tel que $f(x_0) < r < f(x_0)+\frac{1}{2^{n+1}}$, puis $W = U(r)\cap\complement\overline{U(r-\frac{1}{2^n})}$ (en posant $U(t)=\emptyset$ si $t<0$, et $U(t)=E$ si $t>1$, par convention). W est un voisinage ouvert de x_0, puisque $f(x_0)<r \Rightarrow x_0\in U(r)$, et $r-\frac{1}{2^{n+1}} < f(x_0) \Rightarrow x_0\in\complement U(r-\frac{1}{2^{n+1}})\subset\complement\overline{U(r-\frac{1}{2^n})}$.

La définition même de W implique que pour $x\in W$, $r-\frac{1}{2^n}\leq f(x)\leq r$, donc $|f(x)-f(x_0)|\leq\frac{1}{2^n}$; et f est continue. ∎

(E) CONVERGENCE DANS DES ESPACES DE FONCTIONS

Ce paragraphe est placé ici en introduction au chapitre suivant (les espaces dont on parle sont des espaces vectoriels). On y a regroupé des remarques et des résultats d'un usage courant en analyse.

1 - Soit E un ensemble, F un espace métrique ; on note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F, et pour $f, g \in \mathcal{F}(E,F)$,

$$d(f,g) = \sup_{x\in E} d(f(x),g(x)) \in [0,+\infty]$$

$d(f,g)$ vérifie tous les axiomes d'une distance, sauf que ses valeurs peuvent être infinies ; comme la remplacer par $d' = \frac{d}{1+d}$, à valeurs dans $[0,1]$ et qui est une vraie distance, ne modifie ni la topologie associée, ni même les suites de Cauchy, on considèrera $(\mathcal{F}(E,F);d)$ comme un espace métrique dans la suite (on peut entendre $(\mathcal{F}(E,F),d')$ sans changer ni les énoncés, ni leurs preuves)

On dit qu'une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de E dans F <u>tend uniformément</u> vers f si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $d(f_p,f) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour $F = \mathbb{C}$, on dit qu'une série $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E dans $\mathbb{C}$ est <u>normalement convergente</u> s'il existe une série numérique à termes positifs convergente, $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p < +\infty$, telle que pour tout $x\in E$, $|u_p(x)| \leq a_p$

<u>Lemme</u>: <u>Si F est complet, $\mathcal{F}(E,F)$ aussi</u>

Preuve : Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{F}(E,F)$ (en particulier les $d(f_p,f_q)$ sont tous <u>finis</u> pour p,q assez grands !) :

(*) $\forall \varepsilon>0\ \exists N,\ p,q \geq N \Rightarrow \sup_{x\in E} d(f_p(x),f_q(x)) < \varepsilon$

En particulier pour tout $x\in E$ fixé, la suite $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, donc convergente, vers $f(x)\in F$, et en passant à la limite quand $q\to\infty$ dans (*), il vient $\sup_{x\in E} d(f_p(x),f(x)) = d(f_p,f) < \varepsilon$; et $f_p \to f$ dans $\mathcal{F}(E,F)$ ∎

<u>Corollaire</u> : <u>Une série normalement convergente est uniformément convergente dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{C})$</u>.

Preuve : Avec les notations ci-dessus, pour tout $\varepsilon>0$ il existe N tel que
$\forall x\in E,\quad p\geq q\geq N \Rightarrow |u_p(x)+\cdots+u_q(x)| \leq |u_p(x)|+\cdots+|u_q(x)| \leq a_p+\cdots+a_q < \varepsilon$
La série $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p$ est donc de Cauchy dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{C})$, et on conclut par le lemme ∎

2 - On suppose maintenant que E est un espace <u>topologique</u>, et on note $\mathcal{C}(E,F)$ l'ensemble des applications <u>continues</u> de E dans F.

<u>Théorème</u>: <u>La limite uniforme d'une suite d'applications continues est continue</u>

Preuve : Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}(E,F)$, uniformément convergente vers $f\in\mathcal{F}(E,F)$. Pour $x_0\in E$ et $\varepsilon>0$, il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $p\geq p_0$ implique $\forall x\in X\quad d(f_p(x),f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, puis un voisinage V de x_0 dans E tel que, pour $x\in V$,

$d(f_{p_0}(x), f_{p_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$; d'où $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{p_0}(x)) + d(f_{p_0}(x), f_{p_0}(x_0)) + d(f_{p_0}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ dès que $x \in V$; donc f est continue en x_0, et finalement $f \in \mathcal{C}(E,F)$. ■

<u>Corollaire : Si F est complet, $\mathcal{C}(E,F)$ aussi</u>

Preuve : $\mathcal{C}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{F}(E,F)$ par le théorème précédent, et on conclut par le lemme du 1, et la proposition II.B.2 (c). ■

<u>Remarque</u> : La topologie étudiée dans ces deux numéros, définie par la "distance" d sur $\mathcal{F}(E,F)$ (en réalité par d', qui fait de $\mathcal{F}(E,F)$ un vrai espace métrique), s'appelle "<u>topologie de la convergence uniforme</u>". Les quatre énoncés qui suivent illustrent ses qualités.

3 - <u>Proposition : (théorème de Heine "uniforme") : Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille "équicontinue" d'applications de E, métrique compact, dans F métrique. Alors la famille est "uniformément équicontinue"</u>.

"équi-" signifie que les "α" des définitions C.1 ($\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0 \dots$) valent simultanément pour toutes les fonctions de la famille : ainsi l'équicontinuité en a :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, \forall i \in I, \quad d(a,x) < \alpha \Rightarrow d(f_i(a), f_i(x)) < \varepsilon$
et l'uniforme équicontinuité :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x, y \in E\ \forall i \in I \quad d(x,y) < \alpha \Rightarrow d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$

Preuve : la même que celle du théorème de Heine C.2 : remplacer f par f_i. ■

4 - <u>Proposition : Soit T un espace topologique, E un espace topologique compact, F un espace métrique, $t_0 \in T$, $f \in \mathcal{C}(T \times E, F)$. Posons pour $t \in T$ et $x \in E$ $f_t(x) = f(t,x)$, de sorte que $f_t \in \mathcal{C}(E,F)$.
Si $(t_p)_{p \in \mathbb{N}} \longrightarrow t_0$, $f_{t_p} \longrightarrow f_{t_0}$ uniformément dans $\mathcal{C}(E,F)$</u>.

Preuve : Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, f est continue en (t_0, x), et il existe donc des voisinages ouverts U_x de t_0 dans T et V_x de x dans E tels que

$$(t,y) \in U_x \times V_x \Rightarrow d(f(t,y), f(t_0,x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$(V_x)_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E, dont on peut extraire $V_{x_1}, \dots, V_{x_q}$ recouvrant E. $U = \bigcap_{j=1}^{q} U_{x_j}$ est un voisinage ouvert de t_0 dans T, et pour $t \in U, x \in E$, il existe $j \in \{1, \dots, q\}$ tel que $x \in V_{x_j}$, d'où, comme $t \in U_{x_j}$,
$d(f(t,x), f(t_0, x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f(t_0,x), f(t_0,x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $d(f(t,x), f(t_0,x)) < \varepsilon$.
Et finalement $d(f_t, f_{t_0}) \leq \varepsilon$ pour $t \in U$. En particulier l'énoncé s'en déduit. ■

5 - <u>Proposition : Soit E un espace topologique localement compact, F un espace métrique, $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(E,F)$. On suppose que f_p tend uniformément sur tout compact de E vers $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Alors $f \in \mathcal{C}(E,F)$</u>.

Preuve : Tout point $x_0 \in E$ admet un voisinage V compact, et $(f_p|_V)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite uniformément convergente de $\mathcal{C}(V,F)$, vers $f|_V$.
Donc $f|_V \in \mathcal{C}(V,F)$ par le théorème 2, et f est continue en x_0. ■

Exemple : Pour $E = U$, ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $F = \mathbb{C}$, on peut choisir une suite exhaustive de compacts $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de U (cf. D.3), puis pour $f, g \in \mathcal{C}(U,\mathbb{C})$, poser $\delta_p(f,g) = \sup_{x\in K_p} |f(x) - g(x)|$, puis $\delta(f,g) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\delta_p(f,g)}{1+\delta_p(f,g)}$

On vérifie que δ est une distance sur $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$, et qu'une suite $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans l'espace métrique $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$ (c'est-à-dire $\delta(f_q,f) \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$) si et seulement si $f_q \to f$ uniformément sur tout compact de U.

La proposition précédente implique alors aisément que $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$ est complet.

6 - Proposition ("interversion des passages à la limite"). Soit E un espace métrique complet, et $(x_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de E telle que

(a) $\forall p \in \mathbb{N} \quad x_{p,q} \xrightarrow[q\to\infty]{} x_p \in E$

(b) $\exists (y_q)_{q\in\mathbb{N}}$ suite dans E telle que $x_{pq} \xrightarrow[p\to\infty]{} y_q$ uniformément pour $q \in \mathbb{N}$

Alors : $(y_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est convergente, vers $y \in E$; $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, vers $x \in E$; et $x = y$.

Preuve : Pour $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que $p > p_0$ implique $d(x_{pq}, y_q) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, par (b). Par (a) on peut trouver, pour $p > p_0$ fixé, $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q, q' > q_0$ implique $d(x_{pq}, x_{pq'}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Il vient alors, dès que $q, q' > q_0$

$$d(y_q, y_{q'}) \leq d(y_q, x_{pq}) + d(x_{pq}, x_{pq'}) + d(x_{pq'}, y_{q'}) < \varepsilon$$

Comme E est complet, (y_q) est donc convergente vers $y \in E$.

Pour $p > p_0$ fixé, le couple $(x_{pq}, y_q) \in E\times E$ tend alors vers (x_p, y) dans $E\times E$, quand q tend vers $+\infty$, et $d(x_{pq}, y_q) < \frac{\varepsilon}{3}$ implique à la limite $d(x_p, y) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme c'est vrai pour tout $p > p_0$, on conclut que $x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} y$ dans E. ∎

7 - Dès que E est un ensemble et F un espace topologique, $\mathcal{F}(E,F)$ s'identifie au produit $\prod_{x\in E} (F)_x$ (avec $(F)_x = F$), et est donc muni d'une topologie naturelle, la topologie-produit (cf. I.F.2), appelée "topologie de la convergence simple", et pour laquelle $\mathcal{F}(E,F)$ est séparé dès que F l'est.

Proposition : Pour une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$, sont équivalents :

(a) $f_p \xrightarrow[p\to\infty]{} f$ pour la topologie de la convergence simple

(b) $\forall x \in E$, $f_p(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(x)$ dans F.

Preuve : Cela résulte de la définition même de la topologie-produit (cf. I.F.2). ∎

Remarque : Supposons F métrique. La topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}(E,F)$ est alors plus fine que celle de la convergence simple (strictement en général). Toutefois le résultat suivant est utile :

Lemme de Dini : Soit K un espace compact, et $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, simplement convergente vers $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Alors $f_p \to f$ uniformément sur K.

Preuve : Les fonctions $g_p = f - f_p$ forment une suite croissante de fonctions continues positives, tendant simplement vers zéro. Donc les $F_p = \{x \in K \mid g_p(x) \geq \varepsilon\}$ forment, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite décroissante de fermés de K, d'intersection vide. Comme K est compact l'un des F_p, soit F_{p_0}, est vide, et pour tout $p \geq p_0$ et tout $x \in K$, $g_p(x) \leq g_{p_0}(x) < \varepsilon$. C'est-dire que $g_p \to 0$ uniformément sur K. ■

8 - Théorème d'Ascoli: Soit K un espace métrique compact, F un espace métrique complet, P une partie équicontinue de $\mathcal{C}(K,F)$, telle que, pour tout $x \in K$, $\{f(x) \mid f \in P\}$ est compact dans F. Alors $\overline{P}$ est compact dans l'espace métrique $\mathcal{C}(K,F)$, c'est-à-dire pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve: Comme l'espace métrique $\mathcal{C}(K,F)$ est complet par le lemme 1, d'après le corollaire B.3, il suffit de recouvrir P par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par la proposition 3 de ce paragraphe, il existe $\alpha > 0$ tel que
$\forall f \in P, \forall x,y \in K \quad d(x,y) < \alpha \Rightarrow d(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$
On peut recouvrir le compact K par un nombre fini de boules de rayon α, de centres $x_1,\dots,x_q \in K$. Par hypothèse $G = \overline{\{f(x_j) \mid f \in P, j=1,\dots,q\}}$ est un compact de F, qu'on peut recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$, de centres $y_1,\dots,y_n \in F$. Notons I l'ensemble fini des applications de $\{1,\dots,q\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, et pour $i \in I$, $P_i = \{f \in P \mid d(f(x_j),y_{i(j)}) < \frac{\varepsilon}{4}$ pour $j=1,\dots,q\}$.
Les P_i $(i \in I)$ sont en nombre fini, et recouvrent P; il suffit donc de montrer que chacun est contenu dans une boule de rayon ε. Fixons $i \in I$ et choisissons $f,g \in P_i$. Pour tout $x \in K$, il existe $j \in \{1,\dots,q\}$ tel que $d(x,x_j) < \alpha$, d'où $d(f(x),f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{4}$ et $d(g(x),g(x_j)) < \frac{\varepsilon}{4}$; comme $d(f(x_j),y_{i(j)}) < \frac{\varepsilon}{4}$ et $d(g(x_j),y_{i(j)}) < \frac{\varepsilon}{4}$, il vient $d(f(x),g(x)) < \varepsilon$, et finalement $d(f,g) \leq \varepsilon$. ■

Remarque: En particulier, le théorème d'Ascoli implique:
Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de K compact dans F complet, équicontinue, et telle que $\{f_p(x)\}_{p \in \mathbb{N}}$ soit relativement compact dans F, pour tout $x \in K$. Alors on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente sur K.

9 - Les énoncés qui suivent décrivent des parties denses de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$, pour la topologie de la convergence uniforme, lorsque K est compact. Ils sont tous cités sous le nom de "théorème de Stone-Weierstrass".

Proposition: Soit P une partie de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ telle que
(a) $\forall u,v \in P$, $\sup(u,v) \in P$ et $\inf(u,v) \in P$
(b) $\forall x,y \in K$ distincts, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\exists u \in P$, $u(x)=a$ et $u(y)=b$
Alors toute fonction de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de P

Preuve: Soit $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout couple (x,y) de points de K, il existe $u_{x,y} \in P$ tel que $u_{x,y}(x) = f(x)$ et $u_{x,y}(y) = f(y)$. Pour x fixé, l'ensemble $U_y = \{z \in K \mid u_{x,y}(z) > f(z) - \varepsilon\}$ est ouvert, et $y \in U_y$; les $(U_y)_{y \in K}$ sont donc un recouvrement ouvert de K, dont on peut extraire un recouvrement par $U_{y_1},\dots,U_{y_q}$. Posant $u_x = \sup_{j=1,\dots,q} u_{x,y_j}$, on a clairement $u_x \in P$, $u_x(x) = f(x)$, et $u_x(z) > f(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in K$.
L'ensemble $V_x = \{z \in K \mid u_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$ est ouvert, $x \in V_x$, et les $(V_x)_{x \in K}$

sont donc un recouvrement ouvert de K, dont on peut extraire un recouvrement par $V_{x_1},\dots,V_{x_n}$. Posant $u = \inf_{k=1,\dots,n} u_{x_k}$, on a clairement $u \in P$ et $u(z) > f(z)-\varepsilon$ pour tout $z\in K$. Mais de plus, si $z\in K$, $z \in V_{x_k}$ pour un certain $k \in \{1,\dots,n\}$, et $u(z) \leq u_{x_k}(z) < f(z)+\varepsilon$. Finalement pour tout $z\in K$, $f(z)-\varepsilon < u(z) < f(z)+\varepsilon$. Les fonctions u ainsi construites, pour une suite de valeurs de ε tendant vers zéro, répondent à la question. ∎

10 - Théorème (Weierstrass-Bernstein) : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes
$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) x^p(1-x)^{n-p} \qquad (x\in[0,1])$$
tend uniformément sur $[0,1]$ vers f quand $n\to\infty$.

Preuve : Si $R_p(x) = C_n^p x^p (1-x)^{n-p}$, on vérifie en dérivant et sommant de 1 à n que $\sum_{p=0}^{n} R_p(x) = 1$, $\sum_{p=0}^{n} p R_p(x) = nx$, $\sum_{p=0}^{n} p(p-1)R_p(x) = n(n-1)x^2$.
(dériver en x : $\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p y^{n-p} = (x+y)^n$)

D'où $$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 R_p(x) = (nx)^2 - 2nx.nx + (nx+n(n-1)x^2) = nx(1-x) \qquad (*)$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ et posons $M = \sup_{[0,1]} |f|$. Comme f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x, y\in[0,1]$, $|x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. D'où

$$|f(x)-P_n(x)| = \left|\sum_{p=0}^{n} f(x)R_p(x) - \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)R_p(x)\right| \qquad (\text{pour } x\in K, n \text{ fixé})$$
$$\leq \sum_{\substack{|p-nx|\leq\alpha n\\ p\in\{0,\dots,n\}}} \left|f(x)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right| R_p(x) + \sum_{\substack{|p-nx|>\alpha n\\ p\in\{0,\dots,n\}}} \left|f(x)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right| R_p(x) \qquad (\text{car } R_p \geq 0)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{|p-nx|>\alpha n} R_p(x) \leq \frac{2M}{n^2\alpha^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2 R_p(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \frac{2Mx(1-x)}{n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{M}{2n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{par } (*) \text{ et comme } x(1-x)\leq \tfrac{1}{4} \text{ sur } [0,1])$$
$$< \varepsilon \quad \text{dès que } n > \frac{M}{\alpha^2\varepsilon}. \ ∎$$

11 - Théorème de Stone-Weierstrass : Soit P une partie de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ telle que
(1) Les fonctions constantes appartiennent à P
(2) Si $u, v\in P$, $u+v\in P$ et $uv \in P$
(3) Si $x, y\in K$ sont distincts, il existe $u\in P$ telle que $u(x)\neq u(y)$

Alors toute fonction de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de P.

Preuve : Il suffit de montrer que $\overline{P}$ vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition 9 (puisqu'alors $\overline{\overline{P}} = \overline{P} = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.) Remarquons que $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (cf. C.3), que P en est un sous-espace d'après (1) et (2), et donc $\overline{P}$ aussi par passage à la limite uniforme (cf. C.3), et vérifie encore (2). Il s'ensuit que tout polynôme de $u\in\overline{P}$ à coefficients réels est encore dans $\overline{P}$.

(a) Soit $u\in\overline{P}$, et supposons $\sup_{x\in K}|u(x)|\leq 1$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe d'après le théorème 10 un polynôme $R : [0,1]\to\mathbb{R}$ tel que $|R(t)-\sqrt{t}|<\varepsilon$ pour $0\leq t\leq 1$. Alors $|R(u(x)^2) - |u(x)|| < \varepsilon$ pour tout $x\in K$, soit $|R(u^2)-|u|| \leq \varepsilon$ sur K ; comme $R(u^2)\in\overline{P}$, $|u|\in\overline{P}$.

Pour $u, v\in\overline{P}$, $\sup(u,v) = \frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$ et $\inf(u,v) = \frac{1}{2}(u+v-|u-v|)$ sont donc aussi dans $\overline{P}$.

(b) Si $x, y \in K$ sont distincts et $a, b \in \mathbb{R}$, il existe par (3) $u \in P$ telle que $u(x) \neq u(y)$. La fonction $v : z \longmapsto v(z) = b + (a-b) \cdot \dfrac{u(z)-u(y)}{u(x)-u(y)}$ est encore dans P par (1) et (2), et $v(x) = a$, $v(y) = b$. ■

Remarque : Un espace vectoriel muni d'un produit s'appelle une algèbre. Les conditions (1) et (2) du théorème signifient donc que P est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ contenant les constantes (il suffit qu'elle contienne la fonction 1, élément-unité de l'algèbre $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.) ; on exprime aussi la condition (3) en disant que P "sépare les points" (de K)

12 - Théorème (aussi "de Stone-Weierstrass") : Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ contenant les constantes et séparant les points du compact K, et de plus stable par conjugaison. Alors $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ (pour la topologie de la convergence uniforme).

Preuve : La sous-algèbre (sur $\mathbb{R}$) A' de A de ses fonctions à valeurs réelles vérifie les conditions (1) et (2) du théorème 11, mais aussi (3) puisque si $u \in A$ et $u(x) \neq u(y)$ pour $x, y \in K$, on a $\operatorname{Re} u = \frac{1}{2}(u + \bar{u}) \in A'$, $\operatorname{Im} u = \frac{1}{2i}(u - \bar{u}) \in A'$, et $\operatorname{Re} u(x) \neq \operatorname{Re} u(y)$, ou $\operatorname{Im} u(x) \neq \operatorname{Im} u(y)$. Donc $\overline{A'} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ par le théorème 11, et le résultat s'en déduit en séparant parties réelle et imaginaire. ■

Corollaire : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ est limite uniforme sur K d'une suite de polynômes à coefficients complexes.

Preuve : On prend pour A l'algèbre des restrictions à K de polynômes $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. ■

Corollaire : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue périodique de période 2π. Il existe une suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de "polynômes trigonométriques", c'est-à-dire de fonctions de la forme $x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ $(n \in \mathbb{N}; a_k \in \mathbb{C})$, qui tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

Preuve : La sphère-unité $S(0,1)$ de $\mathbb{C}$ est compacte pour la topologie induite, et homéomorphe à l'espace-topologique quotient $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ (cf. I.F.4) par l'application $\dot{x} \mapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ sur $S = S(0,1)$. Poser $\tilde{f}(\dot{x}) = f(x)$ identifie f à une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, \mathbb{C})$ (par définition de la topologie quotient ; la sous-algèbre A de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, \mathbb{C})$ des polynômes trigonométriques vérifie les conditions du théorème ; et approcher $\tilde{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, c'est approcher f uniformément sur $\mathbb{R}$. ■

Remarques : • La condition "A stable par conjugaison" (c'est-à-dire $u \in A \Rightarrow \bar{u} \in A$) est essentielle pour le théorème 12, comme le montrent la théorie des séries de Fourier, ou celle des fonctions holomorphes.
• On utilise aussi le théorème de Stone Weierstrass sous la forme suivante, qui se déduit visiblement de la proposition 9 :

Théorème (Kakutani-Krein) : Soit A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ qui contient 1 et est stable par sup et inf finis et par limite uniforme. Alors $A = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ si et seulement si A sépare les points de K.