CHAPITRE XI - CONIQUES PROJECTIVES

§1 DÉFINITION DES QUADRIQUES PROJECTIVES

1.1 Dans un espace vectoriel E de dimension $n+1$, l'annulateur d'une forme quadratique Q est un "cône vectoriel" Γ, c'est-à-dire une réunion de droites. On appelle quadrique C de l'espace projectif $X = PE$ une partie C telle qu'il existe une forme quadratique Q telle que $C = P\Gamma$. On dit que la quadrique C est propre si et elle n'est pas vide et si Q est non dégénérée (id est de rang $n+1$). Sinon on dit que C est dégénérée.
Les quadriques d'un espace de dimension 2 s'appellent coniques (projectives)

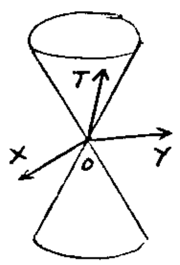
1.2 On suppose ici $k = \mathbb{R}$. Si C est une quadrique propre, il existe une base $\{e_0, \dots, e_n\}$ de E telle que $Q(\sum_0^n x_i e_i) = x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - (x_p^2 + \dots + x_n^2)$, où $(p, n-p)$ est la signature de Q. L'équation de C en coordonnées homogènes dans le repère $\{p_0, \dots, p_n, p_{n+1}\}$ de X (où $p_j = \mathbb{R} e_j$, $p_{n+1} = \mathbb{R}(\sum_0^n e_i)$)
est alors:
$$\sum_{i=0}^{p-1} x_i^2 - \sum_{j=p}^{n} x_j^2 = 0$$

1.3 Soit maintenant X un espace affine de dimension n, $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$ un repère affine, $\mathcal{R}' = \{\mathbb{R}p_0, \dots, \mathbb{R}p_n, \mathbb{R}(p_0 + \dots + p_n)\}$, et $\mathcal{R}'' = \{\mathbb{R}p_0, \mathbb{R}(p_1 - p_0), \dots, \mathbb{R}(p_n - p_0), \mathbb{R}(\sum_1^n p_i - (n-1)p_0)\}$ les repères projectifs associés (au sens de V.3.8, 9, 10) de $\overline{X} = P\hat{X}$.
Soit C la quadrique projective de $\overline{X}$ associée à la forme Q de matrice $(a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ symétrique dans la base $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ de $\hat{X}$.
Si l'on note $(T, X_1, \dots, X_n)$ les coordonnées d'un point de $\overline{X}$ dans le repère $\mathcal{R}''$, l'équation de C dans ce système s'écrit:
$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{0i} X_i T + a_{00} T^2 = 0.$$

La "quadrique à l'infini" C_∞ de C, c'est-à-dire $C \cap X_\infty$ a pour équations
$$(2) \quad T = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j = 0$$
(c'est donc bien une quadrique de l'espace projectif X_∞ de dimension $n-1$), et $C \cap X$ a pour équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$
$$(3) \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{0i} X_i + a_{00} = 0 \qquad (\text{« } T = 1 \text{ »})$$
Il est clair que c'est n'importe quelle "quadrique affine" (id est: surface algébrique de degré 2 de l'espace affine), et si $n = 2$, n'importe quelle conique au sens de X.1.1, 2.

1.4 Réciproquement, si C est la quadrique affine de X d'équation (3) dans le repère $\mathcal{R}$, (1) est l'équation dans $\mathbb{R}^n$ de la seule quadrique projective $\overline{C}$ de $\overline{X}$ telle que $\overline{C} \cap X = C$. $\overline{C} \cap X_\infty$ s'appelle la quadrique à l'infini de C, et ses points les points à l'infini, ou directions asymptotiques de C. Leur équation est (2).

1.5 Dans la suite, on suppose $n=2$. Si C est une conique propre du plan projectif X, on peut toujours trouver un repère projectif où l'équation de C s'écrit : $X^2+Y^2-T^2=0$



Autrement dit, il n'existe qu'une seule conique projective propre (réelle) à homographie près

1.6 Soit C une conique propre du plan affine X, et $\overline{C}$ sa complétée projective dans $\overline{X}$.

Proposition : On a l'une des trois situations :

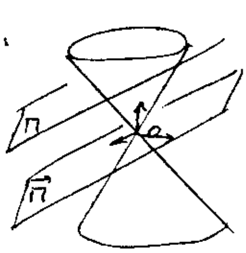
a) $X_\infty \cap \overline{C} = \phi \iff$ C est une ellipse

b) $X_\infty \cap \overline{C} = \{A,B\} \iff$ C est une hyperbole de directions asymptotiques A et B

c) $X_\infty \cap \overline{C} = \{T\} \iff$ C est une parabole de direction asymptotique T.

De plus dans le cas c), X_∞ est tangente à $\overline{C}$, et dans le cas b), les tangentes à $\overline{C}$ en A et B sont les asymptotes de l'hyperbole C.

Preuve :



Un plan vectoriel $\vec{\Pi}$ de $\mathbb{R}^3$ coupe le cône Γ d'équation $X^2+Y^2=Z^2$ suivant $\{0\}$, ou deux droites, ou bien encore est tangent à Γ le long d'une droite. Si $P\vec{\Pi}$ est choisie comme droite à l'infini dans $P\mathbb{R}^3$, la partie affine de la conique est l'intersection avec Γ d'un plan affine Π de direction $\vec{\Pi}$ (autre que $\vec{\Pi}$). Le reste se déduit de X.4.1, par exemple. ■

1.7 Notons qu'une conique projective propre coupe le plan projectif en son extérieur, lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes distinctes à la conique, et son intérieur, lieu des points d'où toute droite issue est sécante à la conique.

§2 POLARITÉ PAR RAPPORT À UNE CONIQUE

2.1 Dualité Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Si F, G sont des sous-espaces, $F^\perp$, $G^\perp$ sont des sous-espaces de E^*, et $\dim F + \dim F^\perp = 3$, $F \subset G \Rightarrow F^\perp \supset G^\perp$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$, $F^{\perp\perp} = F$.

Posons $X = PE$, $X^* = PE^*$. L'application $Y = PF \longmapsto P(F^\perp) = Y'$ est bijective de l'ensemble des sous-espaces projectifs de X sur ceux de X^* (On a $X' = \phi$, on pose $\dim \phi = -1$). Elle envoie les points sur les droites et les droites sur les points. On l'appelle dualité. On a :

$Y \subset Z \Leftrightarrow Y' \supset Z'$, $\langle Y \cup Z \rangle' = Y' \cap Z'$, $(Y \cap Z)' = \langle Y' \cup Z' \rangle$, $Y'' = Y$.

Si X est muni d'un repère projectif $\{A, B, C, G\} = \mathcal{R}$, le repère projectif dual de X^* est $\{A', B', C', G''\} = \mathcal{R}'$, où $\begin{cases} A = \mathbb{R}\vec{\imath},\ B = \mathbb{R}\vec{\jmath},\ C = \mathbb{R}\vec{k},\ G = \mathbb{R}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}) \\ A' = \mathbb{R}\vec{\imath}^*,\ B' = \mathbb{R}\vec{\jmath}^*,\ C' = \mathbb{R}\vec{k}^*,\ G'' = \mathbb{R}(\vec{\imath}^*+\vec{\jmath}^*+\vec{k}^*) \end{cases}$

Trois points P, Q, R sont alignés si et seulement si P', Q', R' sont concourantes, et $\langle P, Q, R \rangle' = P' \cap Q' \cap R'$. De plus, si P, Q, R, S sont alignés :

$$(P', Q', R', S') = (P, Q, R, S).$$

2.2 La donnée d'une forme quadratique Q non dégénérée définit un isomorphisme
$$E \xrightarrow{\varphi} E^*$$
$$\vec{x} \longmapsto (\vec{y} \mapsto Q(\vec{x}, \vec{y}))$$

L'orthogonal d'une droite est un plan, et d'un plan une droite. L'orthogonal de $\vec{x}_0 \in E$ est le plan $\{\vec{y} \in E \mid Q(\vec{x}_0, \vec{y}) = 0\}$. L'application induite
$$X = PE \longrightarrow \mathcal{G}(X)$$
$$x = \mathbb{R}\vec{v} \longmapsto x' = P[\varphi(\vec{v})^{\perp}]$$
s'appelle polarité par rapport à la conique C associée à Q. La polaire d'un point est une droite, le pôle d'une droite est un point.

On dit que deux points x, y sont conjugués si $x = \mathbb{R}\vec{v}$, $y = \mathbb{R}\vec{w}$, et $Q(\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

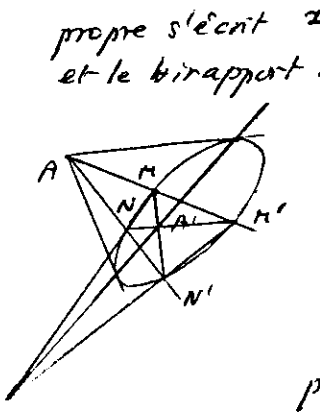
La polaire de x est le lieu des conjugués de x.

Si Q a pour matrice A dans une base de E, l'équation de C dans le repère projectif associé est $\ {}^t x A x = 0$, et celle de la polaire de x_0, ${}^t x_0 A x = 0$.

En particulier si $x_0 \in C$, sa polaire est la tangente à C en x_0 (cf X.1.7).

Trois points sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes, et si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre points alignés, leur birapport est celui de leurs polaires.

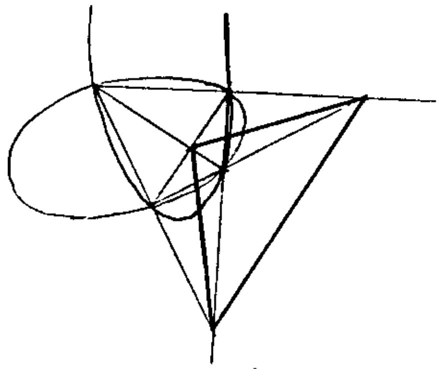
2.3 Le choix d'un repère projectif de X fournit une homographie de $P\mathbb{R}^3$ sur X. Comme on peut toujours trouver un repère où l'équation d'une conique propre s'écrit $x^2 + y^2 = t^2$, et qu'une homographie conserve l'alignement et le birapport de quatre points, on peut déduire les propriétés de la polarité par rapport à une conique projective propre de celles déjà connues de la polarité par rapport à un cercle. Par exemple



$(A, A', M, M') = -1$, où $A' \in pol(A)$, et $\{M, M'\} = \langle AA' \rangle \cap C$;

si l'on mène deux sécantes de A à C en $\{M, M'\}$ et $\{N, N'\}$, les points $\langle MN' \rangle \cap \langle NM' \rangle$ et $\langle MN \rangle \cap \langle M'N' \rangle$ sont sur la polaire de A, ainsi que les pieds des tangentes menées de A à C.

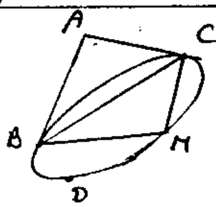
2.4 On dit qu'un triangle est <u>autopolaire</u> par rapport à C si chaque sommet du triangle est le pôle du coté opposé.



<u>Étant données deux coniques qui se coupent en quatre points distincts,</u> (ça existe, car il passe une et une seule conique par cinq points "en position générale".. exercice!) <u>il existe un triangle autopolaire par rapport aux deux</u> (cf la figure)

(§3) LA CONIQUE COMME ESPACE PROJECTIF

<u>3.1 Proposition: Soit Γ une conique propre, B et $C \in \Gamma$, B' et C' les droites du plan projectif dual associées à B et C, A l'intersection des tangentes en B et C à Γ. L'application</u>



$$\begin{cases} \langle B,M\rangle' \longmapsto \langle C,M\rangle' & (\text{pour } M\in\Gamma) \\ \langle B,A\rangle' \longmapsto \langle C,B\rangle' \\ \langle B,C\rangle' \longmapsto \langle A,C\rangle' \end{cases}$$

<u>est une homographie de B' sur C'.</u>

Preuve: Soit $\{A,B,C,D\}$ un repère projectif avec $D\in\Gamma$. L'équation de Γ dans ce repère est $X^2-YZ=0$

Une droite $\langle BM\rangle$ issue de B a pour équation $\lambda X+\nu Z=0$, et $\langle BM\rangle'=(\lambda,0,\nu)$ dans le repère dual

" " $\langle CM\rangle$ " C " $\lambda'X+\mu'Y=0$ " $\langle CM\rangle'=(\lambda',\mu',0)$ "

Dire que l'intersection M de ces deux droites est sur Γ équivaut à dire que $\lambda\lambda'=\nu\mu'$ (car l'intersection a pour coordonnées $(\mu'\nu, -\nu\lambda', -\lambda\mu')$.)

L'application considérée provient donc de l'application linéaire:

$$(\lambda,0,\nu)\longmapsto(\nu,\lambda,0). \blacksquare$$

<u>3.2 Corollaire ("Théorème de Steiner"): a) Étant donnés quatre points P_1,P_2,P_3,P_4 d'une conique propre Γ, et un autre point $A\in\Gamma$, le birapport (AP_1,AP_2,AP_3,AP_4) est indépendant de A. On le note (P_1,P_2,P_3,P_4) et on l'appelle birapport des quatre points.</u>

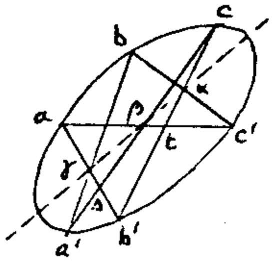
<u>b) Si D est une droite, $A\in\Gamma-D$, et $Q_j=\langle AP_j\rangle\cap D$, on a</u>

$$(P_1,P_2,P_3,P_4)=(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$$

<u>c) Une conique propre Γ a donc une structure naturelle d'espace projectif, pour laquelle $P\mapsto\langle AP\rangle\cap D$ est une homographie pour toute droite D et tout point A de $\Gamma-D$.</u>

Preuve: Le a) résulte de 2.2. et 3.1, et le reste s'en déduit. $\blacksquare$

3.3 "Théorème de Pascal": Les trois points d'intersection des cotés opposés d'un hexagone inscrit à une conique propre sont alignés.



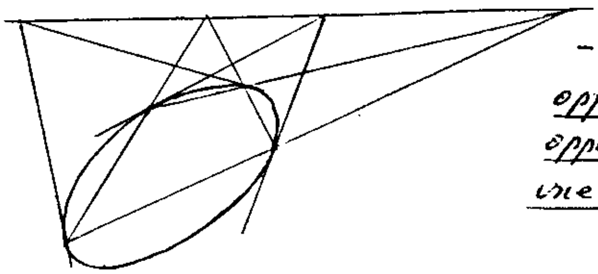
Preuve: Posons $\alpha = bc' \cap cb'$, $\beta = ca' \cap ac'$, $\gamma = ab' \cap ba'$
$\alpha' = b'c \cap \beta\gamma$, $s = ab' \cap a'c$, $t = ac' \cap b'c$

Par 3.2, il vient:

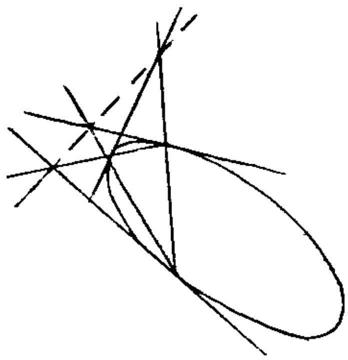
$(t, c, \alpha', b') = (ac', \beta c, \beta\gamma, \beta b')$ (faisceau de sommet β)
$= (a, s, \gamma, b')$ (")
$= (a, c, b, b')$ (perspective de $\langle ab' \rangle$ sur Γ de centre a')
$= (t, c, \alpha, b')$ (perspective de Γ sur $\langle b'c \rangle$ de centre c')

D'où $\alpha = \alpha'$. ■

3.4 Cet énoncé contient le cas particulier de l'"hexagone de Pascal" inscrit à un cercle ; où la preuve peut se faire par les méthodes du chapitre IX. Il contient aussi les énoncés "dégénérés" suivants:



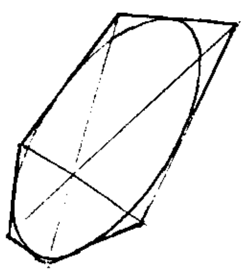
- les points d'intersection des cotés opposés et des tangentes aux sommets opposés d'un quadrilatère inscrit à une conique propre sont alignés.



- les points d'intersection des tangentes aux sommets d'un triangle inscrit à une conique propre avec les cotés opposés sont alignés

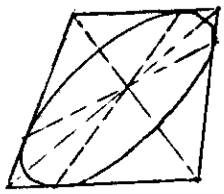
Remarquons aussi que le théorème de Pappus est l'équivalent du théorème de Pascal dans le cas d'une conique dégénérée en deux droites.

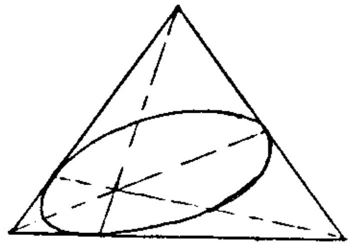
3.5 "Théorème de Brianchon": Les diagonales d'un hexagone circonscrit à une conique propre sont concourantes.



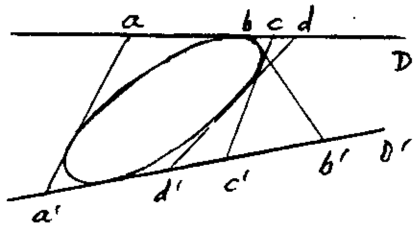
Preuve: C'est l'énoncé dual de 3.3. ■

3.6 De même, des cas "dégénérés" du théorème de Brianchon sont les suivants:





3.7 Par dualité, le corollaire 3.2 permet aussi de définir le birapport de quatre tangentes à une conique propre, et



l'énoncé dual de 3.2.a) est:

$$(a,b,c,d) = (a',b',c',d')$$

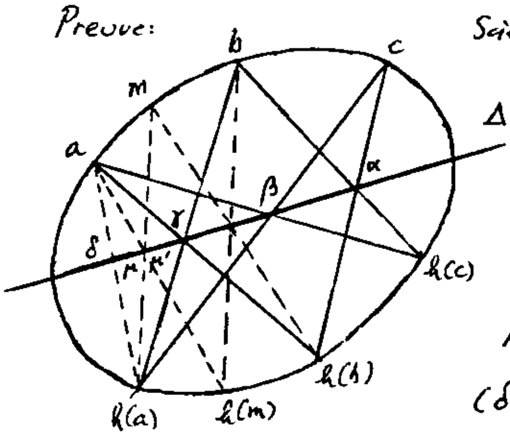
lorsque D et D' sont deux tangentes fixes.

3.8 Proposition: Soit h une homographie d'une conique propre Γ d'un plan projectif X. Alors il existe une droite Δ de X telle que

$$\forall x,y \in \Gamma \quad x \neq h(y) \text{ et } y \neq h(x) \Rightarrow \langle x, h(y)\rangle \cap \langle y, h(x)\rangle \in \Delta$$

On appelle Δ l'axe de l'homographie h. Les points fixes de h sont les points de $\Gamma \cap \Delta$.

Preuve:



Soient $a,b,c \in \Gamma$ tels que $a,b,c,h(a),h(b),h(c)$ soient tous distincts. Par 3.3, $\alpha = \langle b\, h(c)\rangle \cap \langle c\, h(b)\rangle$, $\beta = \langle c\, h(a)\rangle \cap \langle a\, h(c)\rangle$, et $\gamma = \langle a\, h(b)\rangle \cap \langle b\, h(a)\rangle$ sont alignés sur une droite Δ. Soit m un autre point de Γ, $\mu = \langle h(a), m\rangle \cap \Delta$, $\mu' = \langle a\, h(m)\rangle \cap \Delta$, et $\delta = \langle a\, h(a)\rangle \cap \Delta$.

Par 3.2, on a

$$(\delta,\mu,\gamma,\beta) = (a,m,b,c)$$
$$= (h(a), h(m), h(b), h(c)) = (\delta,\mu',\gamma,\beta)$$

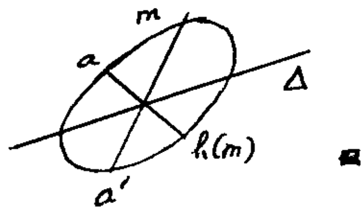
Donc $\mu = \mu'$, autrement dit $\langle m\, h(a)\rangle \cap \langle a\, h(m)\rangle \in \Delta$

Si n est encore un autre point de Γ, on aura de même $\langle n\, h(a)\rangle \cap \langle a\, h(n)\rangle \in \Delta$, et appliquant 3.3 à l'hexagone $a, h(m), n, h(a), m, h(n)$, il vient

$$\langle m\, h(n)\rangle \cap \langle n, h(m)\rangle \in \Delta. \quad \blacksquare$$

3.9 Proposition : Une homographie de Γ est déterminée par son axe et l'image a' d'un point a donné de $\Gamma - \Delta$.

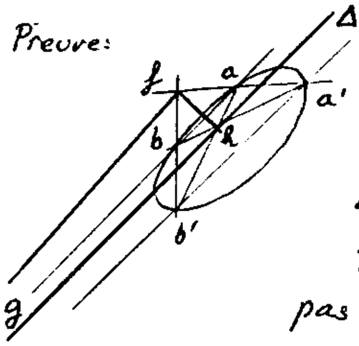
Preuve : Cela résulte immédiatement de 3.8, et de la construction ci-contre :



■

3.10 Proposition. Une homographie h de Γ est involutive si et seulement s'il existe un point $f \in X - \Gamma$ tel que pour tout $m \in \Gamma$, $\langle m, h(m) \rangle$ passe par f. On appelle f le point de Frégier de h. C'est le pôle de son axe.

Preuve :



Si $a' = h(a)$ et $b' = h(b)$ posons $f = aa' \cap bb'$, $g = ab \cap a'b'$, $h = ab' \cap a'b$.
f, g, h forment un triangle autopolaire par rapport à Γ, par 2.3. Or gh est l'axe Δ de h par 3.8. Donc $f = aa' \cap bb'$ est le pôle de Δ, qui ne dépend pas de a et b, mais seulement de l'homographie. ■

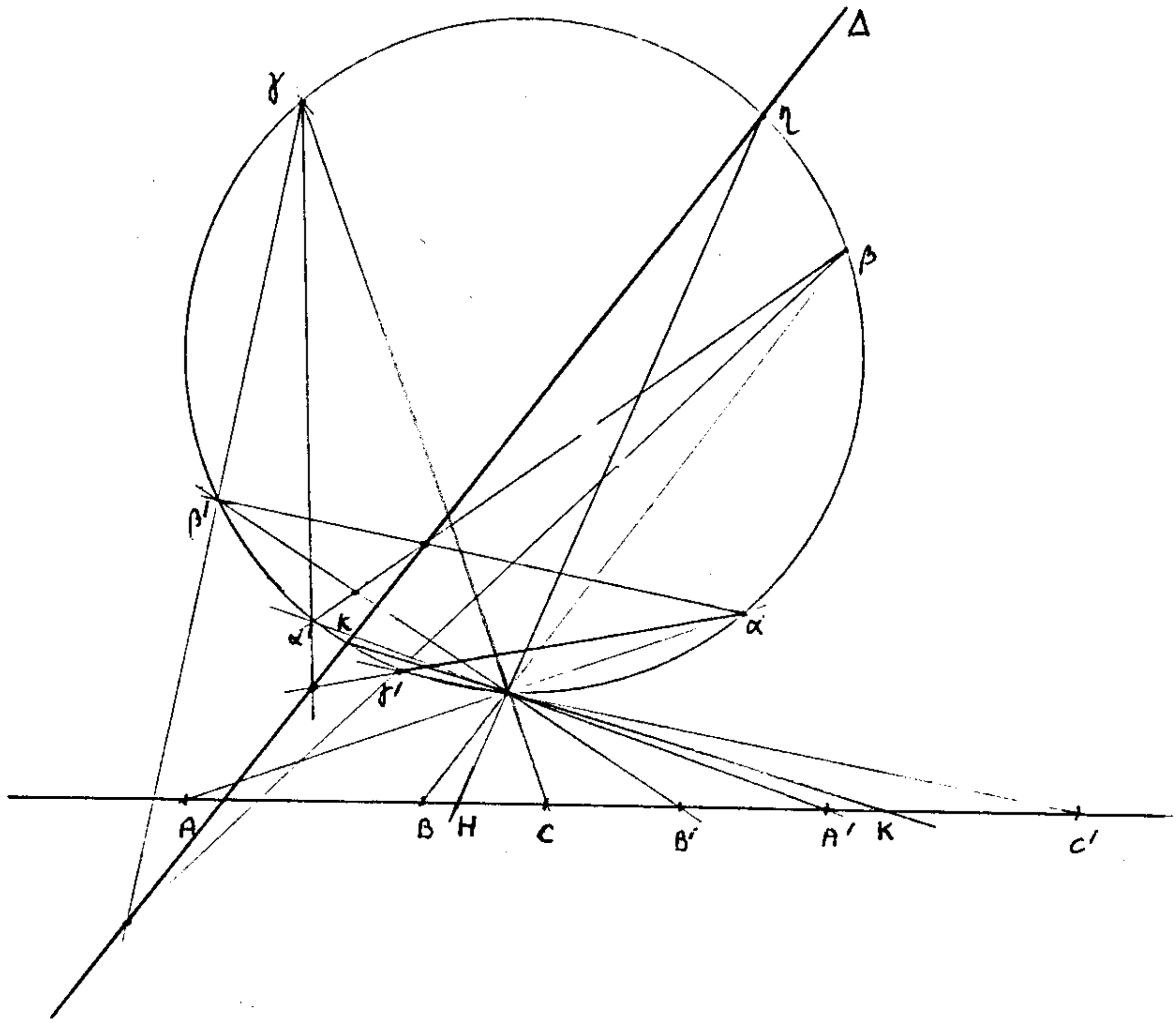
En particulier une involution ne peut avoir que 0 ou 2 points fixes, qui sont les pieds des tangentes menées de f à Γ, ou encore $\Gamma \cap \Delta$.

3.11 Dès qu'on connait les images de trois points par une homographie de Γ, on sait donc construire son axe, ses points fixes éventuels, et l'image de n'importe quel autre point "à la règle".

Mais ceci vaut aussi pour une homographie d'une droite, ou d'une droite sur une autre droite, ou d'un faisceau de droites, ou encore d'un tel faisceau sur un autre, pourvu qu'on ait une conique déjà tracée quelquepart, puisqu'on sait, par 3.2.a),b) "transmuer" de telles homographies en une homographie d'une conique.

Donnons ici comme exemple la construction "à la règle et au compas" des points fixes H et K d'une homographie d'une droite D définie par trois points A, B, C et leurs images A', B', C'.

(Le compas n'est utilisé que pour tracer un cercle arbitraire. On choisit dessus un point O arbitraire, et le reste se construit "à la règle seule")
La construction est claire sur la figure :


Δ
γ
η
β
β'
α
α'
K
γ'
A
B
H
C
B'
A'
K
C'

§4 QUELQUES PROPRIÉTÉS AFFINES ET EUCLIDIENNES DES CONIQUES

4.1 Directions et diamètres conjugués

On appelle diamètre d'une conique affine de centre O une corde qui passe par O. Dans le cas d'une hyperbole, une direction δ est dite extérieure si la parallèle par O à cette direction est extérieure, intérieure si elle est sécante, asymptotique si elle est tangente à l'infini ("asymptote").

Proposition:

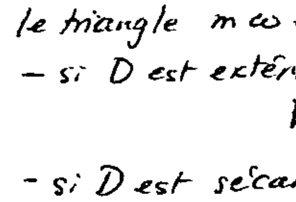
a) Le lieu des milieux des cordes de direction δ d'une ellipse Γ est $\Delta' \cap \mathrm{Int}\,\Gamma$, où Δ' est un diamètre de direction δ'.

b) Le lieu des milieux des cordes de direction intérieure δ d'une hyperbole Γ est une droite Δ' passant par le centre, de direction δ' extérieure. Le lieu des milieux des cordes de direction extérieure δ d'une hyperbole Γ est $\Delta' \cap \mathrm{Int}\,\Gamma$, où Δ' est un diamètre de direction δ' intérieure.

c) Le lieu des milieux des cordes de direction δ non parallèle à l'axe d'une parabole Γ est $\Delta \cap \mathrm{Int}\,\Gamma$, où Δ est la parallèle à l'axe passant par le point T de Γ où la tangente à Γ est parallèle à δ.

d) Dans le cas d'une conique Γ à centre (cas a) et b)), on appelle δ' la direction conjuguée de δ. L'application $\delta \xmapsto{h} \delta' = h(\delta)$ est une homographie involutive de la droite à l'infini du plan, qui a zéro point fixe dans le cas de l'ellipse, et deux points fixes dans le cas de l'hyperbole, qui sont ses directions asymptotiques δ_1 et δ_2. En particulier dans ce cas $(\delta_1, \delta_2, \delta, \delta') = -1$.

Preuve: Considérons une conique projective propre Γ, une droite D non tangente à Γ,



et l'application $h: \begin{array}{l} D \longrightarrow D \\ m \longmapsto \mathrm{pol}(m) \cap D \end{array}$

Si ω est le pôle de D, h est composée des deux homographies

$$D \xrightarrow{h_1} \mathcal{F}_\omega \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\omega \xrightarrow{h_2} D$$
$$m \longmapsto \mathrm{pol}(m) \qquad\quad \Delta \longmapsto \Delta \cap D$$

C'est donc une homographie, et l'involutivité de h vient de ce que le triangle $m\,\omega\,h(m)$ est autopolaire par rapport à Γ.

- si D est extérieure à Γ, h n'a aucun point fixe puisque

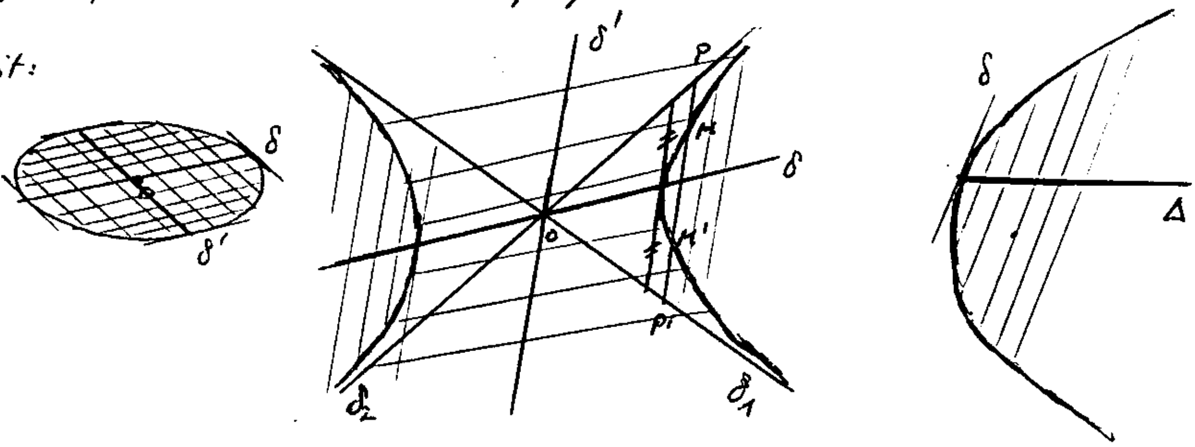
$$\forall m \in D \quad \{m\} \cap \mathrm{pol}(m) = \emptyset$$

- si D est sécante à Γ en $\{m_1, m_2\}$, ce sont ses points fixes, et dans ce cas $(m_1, m_2, m, h(m)) = -1$. En particulier h échange $\mathrm{Int}\,\Gamma \cap D$ et $\mathrm{Ext}\,\Gamma \cap D$.

- si maintenant D est tangente à Γ en m_0, l'application h_2 envoie tout point m de D autre que m_0 sur m_0 (et n'est pas définie en m_0).

Par 2.3, si $m \in \text{Int}\,\Gamma$, pol(m) est le lieu des conjugués harmoniques de m sur les sécantes issues de m (par rapport aux points d'intersection), et si $m \in \text{Ext}\,\Gamma$, ce lieu est $\text{pol}(m) \cap \text{Int}\,\Gamma$.
En interprétant maintenant ces résultats dans la structure affine de $X-D$, on a tous les énoncés proposés. ∎

Soit:



<u>Remarque</u>: Si Γ est une conique <u>euclidienne</u> à centre, les directions des axes principaux sont conjuguées, et ce sont les seules directions conjuguées orthogonales.

<u>4.2</u> <u>Corollaire</u>. a) <u>Si une droite sécante à une hyperbole en M et M' coupe les asymptotes en P et P', on a $\frac{P+P'}{2} = \frac{M+M'}{2}$</u>

b) <u>En particulier, le point de contact d'une tangente à une hyperbole est le milieu du segment qu'elle découpe sur les asymptotes.</u>

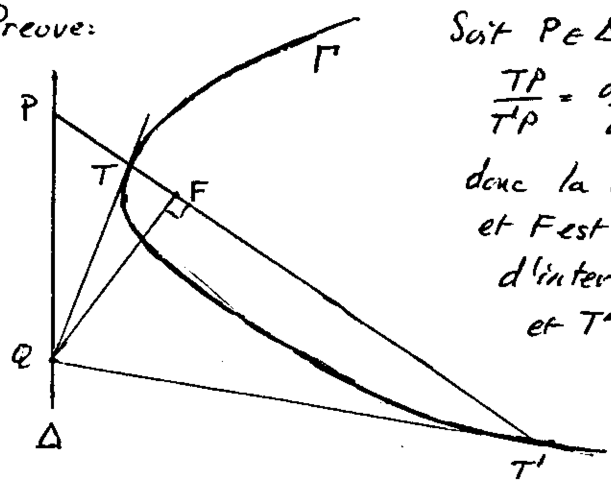
Preuve: le a) n'est autre que la division harmonique du 4.1.d) interprétée sur la sécante. Le b) s'en déduit par dégénérescence. ∎

<u>4.3</u> <u>Proposition</u>: <u>Soit Γ une conique du plan euclidien, de foyer F et de directrice Δ.</u>

a) <u>Δ est la polaire de F par rapport à Γ. C'est donc le lieu des points Q du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à Γ en T et T' telles que la corde TT' passe par F. De plus TT' est alors orthogonale à QF.</u>

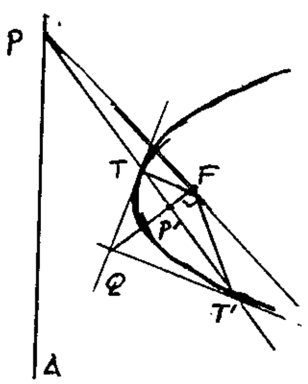
b) <u>Si une sécante coupe Δ en P et Γ en T et T', $\langle FP \rangle$ est la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{FT}, \overrightarrow{FT'})$, et la bissectrice intérieure est $\langle FQ \rangle$, où Q est l'intersection des tangentes à Γ en T et T'</u>

Preuve:



Soit $P \in \Delta$ et $\{T,T'\} = PF \cap \Gamma$. On a
$$\frac{TP}{T'P} = \frac{d(T,\Delta)}{d(T',\Delta)} = \frac{TF}{T'F}$$
donc la division (P,F,T,T') est harmonique, et F est bien le pôle de Δ. Le point d'intersection Q des tangentes à Γ en T et T' est donc sur Δ.

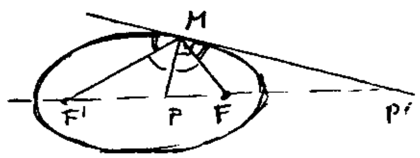
D'où le a), sauf la dernière assertion. Remarquons que FPQ est autopolaire.



Soient maintenant T et T' les points où une autre sécante issue de P coupe Γ. On a de même
$$\frac{TP}{T'P} = \frac{d(T,\Delta)}{d(T',\Delta)} = \frac{TF}{T'F} \quad (1)$$
Soit P' tel que $(P,P',T,T') = -1$. On a $\frac{TP}{T'P} = \frac{TP'}{T'P'}$ (2)
Les droites FP et FP' sont, d'après (1) et (2) les bissectrices de (FT, FT').
En particulier l'angle $\widehat{PFP'}$ est droit, et FP' est la polaire de P par rapport à Γ. D'où le b) et la fin du a) ∎

4.4 *Proposition*: Soit Γ une conique de centre O du plan euclidien, de foyers F et F'. La tangente à Γ en un point M est la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$, extérieure si Γ est une ellipse, intérieure si c'est une hyperbole.

Preuve: Par un calcul ; une fois n'est pas coutume. ∎

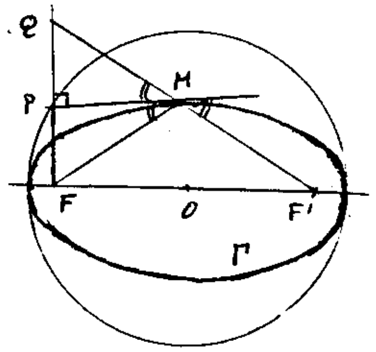


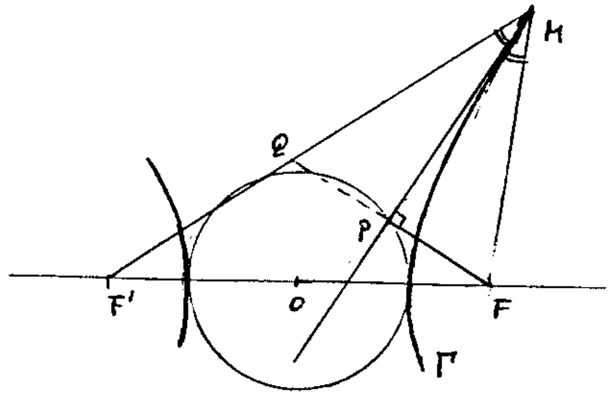
On remarquera que ceci implique
$$\frac{MF}{MF'} = \frac{PF}{PF'} = \frac{P'F}{P'F'}$$
$$\text{d'où} \quad \frac{MF}{PF} = \frac{MF'}{PF'} = \frac{MF \pm MF'}{PF \pm PF'} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}$$

4.5 *Proposition*: Soit Γ une parabole de foyer F. La tangente à Γ en un point M est une bissectrice de (MF, Mx) où Mx est parallèle à l'axe.

Preuve: Par un calcul analogue au précédent, mais plus facile ; deux fois n'est toujours pas coutume. ∎

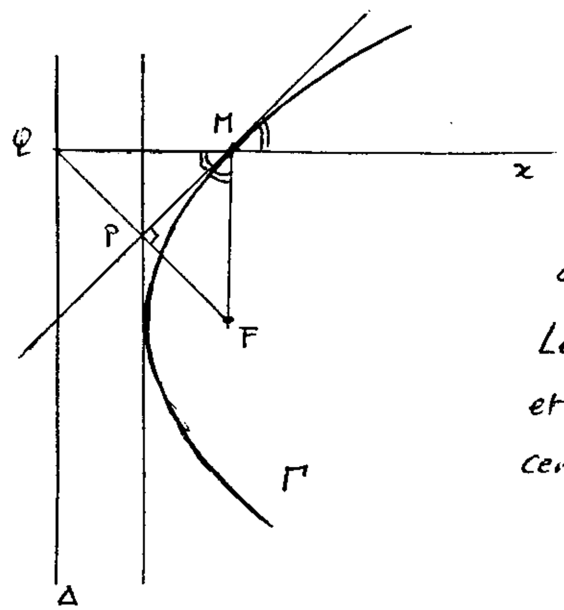
4.6 Proposition : Soit Γ une conique de centre O du plan euclidien, de foyers F et F', $M \in \Gamma$, et P la projection orthogonale de F sur la tangente en M à Γ. Le lieu de P quand M parcourt Γ est le cercle de centre O bitangent à Γ aux points de $\Gamma \cap \langle FF' \rangle$.





Preuve : Soit Q le symétrique de F par rapport à P.
Le triangle QMF est isocèle en M, et, d'après 4.4, Q, M, F' sont donc alignés.
Par suite $F'Q = F'M \pm MQ = F'M \pm MF = 2a$.
Le lieu de Q est donc le cercle de centre F' et de rayon $2a$, et celui de P est son homothétique de centre F et de rayon $\frac{1}{2}$. ■

4.7 Proposition : Soit Γ une parabole du plan euclidien de foyer F, $M \in \Gamma$, et P la projection orthogonale de F sur la tangente en M à Γ. Le lieu de P quand M parcourt Γ est la tangente à Γ en son sommet.

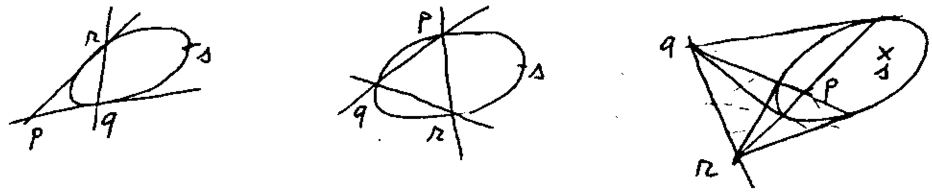


Preuve : Si Q est le symétrique de F par rapport à P, le triangle QMF est isocèle en M, et d'après 4.5, QM est parallèle à l'axe.
Comme $QM = MF = d(M, \Delta)$, où Δ est la directrice de Γ, on a $Q \in \Delta$.
Le lieu de Q est donc la directrice de Δ, et celui de P l'homothétique de Δ de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. ■

§5 EXERCICES

5.1 a) Par 5 points du plan projectif 3 à 3 non alignés passe une et une seule conique. Que se passe-t-il si 3 d'entre eux sont alignés ?

b) Donner la forme de l'équation homogène de la conique (C) dans le repère {p, q, r, s} dans les cas de figure suivants :



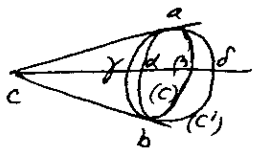
5.2 a) Soit C une conique projective et $a, b, c, d \in C$ distincts. Montrer que sont équivalents ① $(a, b, c, d) = -1$

② $\langle ab \rangle$ passe par le pole de $\langle cd \rangle$

③ $\langle cd \rangle$ " " $\langle ab \rangle$

b) En déduire une construction du conjugué harmonique d'un point par rapport à deux autres sur une conique, sur une droite.

c) a, b, c trois points du plan projectif, (C) et (C') deux coniques



tangentes en a à $\langle ca \rangle$ et en b à $\langle cb \rangle$

$\{\alpha, \beta\}$ et $\{\gamma, \delta\}$ les points de (C) et (C') sur une droite issue de c.

Montrer que les tangentes à (C) en α et β et à (C') en γ et δ sont concourantes.

5.3 Soit (C) une conique propre

Si abc et $a'b'c'$ sont des triangles polaires par rapport à (C)

$\langle aa' \rangle$, $\langle bb' \rangle$ et $\langle cc' \rangle$ sont concourantes en un point p,

$\langle ab \rangle \cap \langle a'b' \rangle$, $\langle bc \rangle \cap \langle b'c' \rangle$, et $\langle ca \rangle \cap \langle c'a' \rangle$ sont alignés sur une droite δ,

et δ est la polaire de p. (cf. IX.5.14)

5.4 Soit (C) une conique propre et $a, b \in C$

Décrire le groupe G des homographies h du plan telles que

$h(C) = C$, $h(a) = a$, $h(b) = b$ (géométriquement, puis matriciellement)

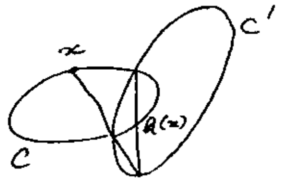
Quelles sont les orbites de G dans le plan ?

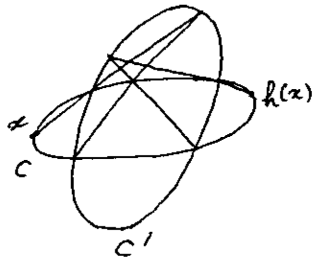
5.5 abc non alignés et $p \in \langle ab \rangle$, $q \in \langle ac \rangle$. Montrer qu'il existe une et une seule conique passant par p et q et telle que abc soit autopolaire par rapport à elle.

5.6 Soit (C) une conique propre, a_1 et a_2 intérieurs à (C), D_1 et D_2 des droites issues de a_1 et a_2 respectivement. Décrire les quatre homographies h du plan telles que $h(a_1)=a_2$, $h(D_1)=D_2$, $h(C)=C$.
(Montrer d'abord que $h|_C$ est une homographie de C).

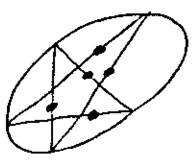
5.7 Soit h une homographie du plan, C une conique propre, $a, b \in C$.
On suppose $h(a)=a$ $h(b)=c \neq b = h^2(b)$ et $h(C)=C$.
Montrer que h a un deuxième point fixe a' sur C, puis que $h|_C$ est involutive, enfin que h est involutive. Décrire son axe et son centre (cf. VI.5.12, VI.5.8, etc)

5.8 Soient C et C' deux coniques propres ayant deux (resp. quatre) points communs. Montrer que chacun des deux dessins ci-dessous définit une homographie h de C. Quel est son axe?





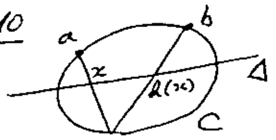
5.9 a) Le <u>problème de Castillon</u>:



Étant donnés une conique propre C et n points $a_1, \dots, a_n$ à l'intérieur, comment construire une "ligne brisée" $m_1, m_2, \dots, m_n, m_1$ inscrite à C (id est: $m_i \in C$) et dont chaque coté $\langle m_i, m_{i+1}\rangle$ passe par l'un des points a_i ($i=1,\dots,n$; $m_{n+1}=m_1$)?
(cf. l'introduction)

b) Énoncer et résoudre le problème dual du problème de Castillon.

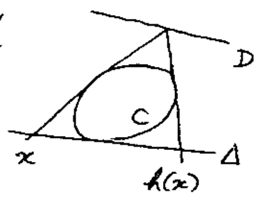
5.10



a) Etant données une conique propre C et une droite Δ, et deux points $a, b \in C-\Delta$, montrer que le dessin ci-contre définit une homographie de Δ. Quels sont ses points fixes?

b) Réciproquement soit h une homographie de Δ, $\{p, q, r\}$ un repère projectif de Δ, et $a, b \notin \Delta$ tels que $\langle ab\rangle \cap \Delta$ ne soit pas un point fixe de h.
On pose $u = \langle ap\rangle \cap \langle b\, h(p)\rangle$, $v = \langle aq\rangle \cap \langle b\, h(q)\rangle$, $w = \langle ar\rangle \cap \langle b\, h(r)\rangle$
Trouver une conique C du plan telle que h soit associée à C, Δ, a, b comme au (a).

5.11



Soit C une conique propre Δ une de ses tangentes, D une droite <u>non</u> tangente à C. Montrer que le dessin ci-contre définit une homographie involutive de Δ, puis que toute homographie involutive de Δ est de cette forme
(Considérer aussi et résoudre le problème dual)

5.12 a) Soit abc un triangle autopolaire par rapport à une conique propre C, $m \in C$, $\langle mb \rangle \cap C = \{m, d\}$, $\langle mc \rangle \cap C = \{m, e\}$

Montrer que a, d, e sont alignés.

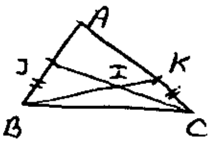
5.13 a) Soient a, b deux points distincts du plan, $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_b$ les faisceaux de droites de sommets a et b, et $h : \mathcal{F}_a \to \mathcal{F}_b$ une homographie.

Montrer que le lieu des $D \cap h(D)$ (pour $D \in \mathcal{F}_a$) est une conique C du plan qui passe par a et par b, et qui est propre sauf si $h(\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle$. Dans ce cas, le lieu est dégénéré en $\langle ab \rangle$ et une autre droite

(Définir h par trois couples, puis utiliser 4.1.a et 4.10.a par exemple)

b) Énoncer (et résoudre) la question duale.

5.14

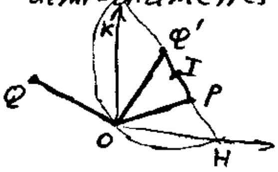


A, B, C fixes. Lieu de I tel que $BJ = CK$?

Généralisations ?

5.15 Comment construire "point par point" une conique dont on connaît cinq points ? trois points, une tangente et son point de contact ? deux tangentes avec point de contact et un autre point ?

5.16 Construire les axes, foyers et sommets d'une ellipse dont on a deux demi-diamètres conjugués.



(Faire tourner l'un d'eux de $\frac{\pi}{2}$ à l'intérieur de l'angle obtus qu'ils forment, d'où φ'. Soit I le milieu de $P\varphi'$ et H et K les intersections de $P\varphi'$ et $\Gamma(I, IO)$. OH et OK sont les axes, et $KP = a$ et $HP = b$ les demi-axes)

5.17 Donner une construction à la règle et au compas de l'intersection d'une droite et d'une parabole donnée par foyer et directrice, fondée sur la division harmonique du 4.3

Indications pour les exercices

5.1 a) Sur l'équation. La conique dégénère en deux droites si trois points sont alignés.
b) $x^2 = yz$; $Ay(x-z) + Bz(x-y) = 0$; $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$

5.3 Écrire l'équation de la polaire par rapport à une conique quelconque.

5.4 Les orbites sont les coniques tangentes à C en a et b

5.5 Écrire son équation en utilisant 5.1.b

5.9 Composer les homographies de C h_i : $h_i(x) = \langle x, a_i \rangle \cap C - \{x\}$ et chercher les points fixes de $h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_n$

5.10 a) Les points fixes sont $\Delta \cap C$. b) Utiliser 5.1.a.

5.12 Introduire n, où am recoupe Γ, puis $e' = ad \cap \Gamma$, $b' = dm \cap ne'$ et montrer $b' = b$ par des considérations de polarité. (ou bien composer les homographies involutives d'éléments ceux du triangle abc).

5.14 $\mathcal{F}_C \longrightarrow \langle AB \rangle \longrightarrow \langle AC \rangle \longrightarrow \mathcal{F}_B$ est une homographie telle que $\langle BC \rangle \longmapsto \langle BC \rangle$
$\langle CJ \rangle \longmapsto J \longmapsto K \longmapsto \langle BK \rangle$
Utiliser alors 5.13 : le lieu est une droite dont on détermine facilement deux points. C'est finalement la bissectrice intérieure de $\widehat{BDC}$, où ACDB est un parallélogramme.

5.15 Utiliser le théorème de Pascal pour construire l'autre intersection de la conique avec une droite arbitraire passant par l'un des cinq points

5.16 Calculer dans les axes (OH, OK).