I Test) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5,5]$.

a) On considère $n+1$ points uniformément distribués sur $[-5,5]$ pour construire le polynome d'interpolation de degré $\leq n$. On prend $n=5$ puis $n=10$.

b) On répète la construction précédente en utilisant les $n+1$ points

$$x_j = -\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) \qquad j = 0, n$$

de l'intervalle $[-1,1]$ transférés sur $[-5,5]$.

II Test) Evaluation de la constante de Lebesgue

$$\Lambda = \max_{x \in [-5,5]} \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(x)|$$

pour les deux ensembles de points considérés dans (I) en fonction de n. Pour (a) on a $\Lambda_n = \alpha\, 2^{n+1}$ et pour (b) on a $\Lambda_n \leq \beta \ln(n)$

On étudie l'erreur d'interpolation en fonction de n pour les cas (a) et (b) en norme ∞.

III Test) Conditionnement de la matrice V en fonction de n pour différentes bases de polynômes

(i) base canonique $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

(ii) base de Legendre sur $[-1,1]$

$$L_0(x) = 1 \; ; \; L_1(x) = x \; ; \; L_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} x L_k - \frac{k}{k+1} L_{k-1} \quad k=1,2,\dots$$

(ou Tchebychev $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$; $T_{k+1} = 2x\,T_k - T_{k-1}$ $(k=1,2\dots)$)

	Composants						
Composants	Hydrogène 1	Méthane 2	Ethylène 3	Ethane 4	Propylène 5	Propane 6	n-Pentane 7
1	16.87	0.1650	0.2019	0.3170	0.2340	0.1820	0.1100
2	0.0	27.70	0.8620	0.0620	0.0730	0.1310	0.1200
3	0.0	0.0	22.35	13.05	4.420	6.001	3.043
4	0.0	0.0	0.0	11.28	0.0	1.110	0.3710
5	0.0	0.0	0.0	0.0	9.850	1.1684	2.108
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2990	15.98	2.107
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.670

Table 5.1. Coefficients de sensibilité pour un mélange de gaz

Exemple 5.4 On considère la matrice de Vandermonde

$$\mathrm{A} = (a_{ij}) \quad \text{avec } a_{ij} = x_i^{n-j},\ i,j = 1,\ldots,n, \tag{5.12}$$

où les x_i sont n abscisses distinctes. On peut construire cette matrice avec la commande MATLAB `vander` . Sur la Figure 5.3, on trace, en fonction de n, le nombre d'opérations nécessaire à la factorisation de Gauss de A. Pour diverses valeurs données de n ($n = 10, 20, \ldots, 100$) le nombre d'opérations est indiquée par des cercles. La courbe dessinée sur le graphe est un polynôme de degré 3 en n approchant au sens des moindres carrés les données précédentes. Le nombre d'opérations a été obtenue avec la commande (`flops`) qui existait dans les versions 5.3.1 (et plus anciennes) de MATLAB. ■

vander

flops

Il n'est pas nécessaire de stocker les matrices $\mathrm{A}^{(k)}$ dans l'algorithme (5.11) ; on peut en effet écraser les $(n-k) \times (n-k)$ derniers éléments de la matrice originale A avec les $(n-k) \times (n-k)$ éléments de $\mathrm{A}^{(k+1)}$. De plus, puisqu'à l'étape k, les éléments sous-diagonaux de la k-ème colonne n'ont aucun impact sur la matrice finale U, ils peuvent être remplacés

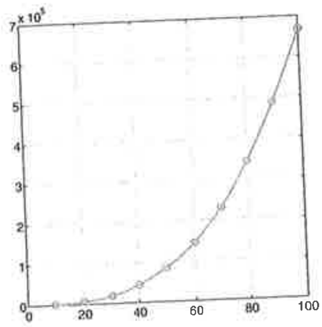

Figure 5.3. Nombre d'opérations nécessaire à la factorisation LU de la matrice de Vandermonde en fonction de la dimension n de la matrice. Cette fonction est un polynôme de degré 3 obtenu en approchant les valeurs correspondant à $n = 10, 20, \ldots, 100$ au sens des moindres carrés