TD-TP en éléments finis, Master I [redacted]

Problème parabolique. On considère le probléme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}(x^2 - x + 18) & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

- Vérifier que la solution exacte est

$$u(x,t) = e^{-t}x(1-x).$$

- Ecrire la formulation variationnelle du problème continu.
- Approcher le problème avec des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 en espace et la méthode de Cranck Nicolson en temps (avec $\theta = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$, $\delta t = 0.1$).

  On rappelle que pour le pb

$$\begin{cases} w'(t) = g(t, w(t)), & \forall t \in [0,T] \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

  avec g une fonction donnée, $g : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, par difference finies on arrive à

$$\frac{1}{\delta t}(w^{k+1} - w^k) = \theta g(t_{k+1}, w^{k+1}) + (1-\theta) g(t_k, w^k), \qquad \forall k \geq 0.$$

  La condition de stabilité dans le cas où on utiliserait une méthode explicite en temps est

$$\delta t \leq \frac{Ch^2}{1-2\theta}, \qquad \theta \in [0, \frac{1}{2}]$$

  Donner la valeur de δt maximale acceptable.

- Illustrer les proprietés de la matrice du système au point précedent dans le cas $\theta = \frac{1}{2}$.
- Résoudre le système linéaire et calculer l'erreur commise pour $t = 0.1$.
- Comparer l'erreur commise avec l'erreur prevue par la thèorie.