TD-TP en éléments finis, Master II 08/09

Application de passage. Calculer

$$\int_K \varphi_A(x,y)\varphi_B(x,y)dxdy, \qquad \text{et} \int_K \nabla\varphi_A(x,y)\cdot\nabla\varphi_B(x,y)dxdy$$

où K est le triangle de sommets $A=(1,1)$, $B=(2,2)$, $C=(\frac{3}{2},3)$ et φ_A, φ_B sont parmis les fonctions de base de l'élément fini de Lagrange d'ordre 1 sur K, *i.e.*, $(K, I\!P_1(K), \Sigma)$ avec $\Sigma = \{u(A), u(B), u(C), \forall u \in I\!P_1(K)\}$. Deux façons de proceder:

1. sans application de passage mais plus couteuse du point de vue numérique
   - donner l'expression de φ_A et φ_B sur K;
   - calculer $\int_K \varphi_A(x,y)\varphi_B(x,y)dxdy$ à l'aide de la formule de quadrature $\frac{|K|}{3}\sum_{i,j=1}^3 \varphi_A(P_{ij})\varphi_B(P_{ij})$ où P_{ij} sont les points de milieu des côtés de K;
   - calculer $\int_K \nabla\varphi_A(x,y)\cdot\nabla\varphi_B(x,y)dxdy$ à l'aide de la formule de quadrature $|K|\nabla\varphi_A(G)\cdot\nabla\varphi_B(G)$ où G est le barycentre de K;
2. avec application de passage, conseillée en générale
   - déterminer la matrice B_K et le vecteur b_K de l'application lineaire $F_K : \hat{K} \to K$ où $\hat{K}$ est le triangle de reference de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;
   - donner l'expression des fonctions de base $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$ de l'élément fini de Lagrange d'ordre 1 sur $\hat{K}$ associées aux nœuds $(0,0)$ et $(1,0)$; montrer que $\varphi_A(x,y) = \hat{\varphi}_1(\hat{x},\hat{y})$ et que $\varphi_B(x,y) = \hat{\varphi}_2(\hat{x},\hat{y})$ avec $(x,y) = F_K(\hat{x},\hat{y})$;
   - calculer $\int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1(\hat{x},\hat{y})\hat{\varphi}_2(\hat{x},\hat{y})d\hat{x}d\hat{y}$ et puis
   $$\int_K \varphi_A(x,y)\varphi_B(x,y)dxdy = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1(\hat{x},\hat{y})\hat{\varphi}_2(\hat{x},\hat{y})|\det(B_K)|d\hat{x}d\hat{y}.$$
   - montrer que $\nabla\varphi_A = B_K^{-t}\nabla\hat{\varphi}_1$ (de même $\nabla\varphi_B = B_K^{-t}\nabla\hat{\varphi}_2$) et calculer ensuite
   $$\int_K \nabla\varphi_A(x,y)\cdot\nabla\varphi_B(x,y)dxdy = \int_{\hat{k}} B_K^{-t}\nabla\hat{\varphi}_1(\hat{x},\hat{y})\cdot B_K^{-t}\nabla\hat{\varphi}_2(\hat{x},\hat{y})|\det(B_K)|d\hat{x}d\hat{y}.$$

Calcul matriciel. Soit $A = \text{tridiag}(-1,\alpha,-1)$ une matrice tridiagonale de taille n, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Calculer les valeurs propres de A (rep. $\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\theta)$, $j = 1,n$, $\theta = \frac{\pi}{n+1}$);
- vérifier que le vecteur propre correspondant est $\mathbf{v}_j = (\sin(j\theta), \sin(2j\theta), \ldots, \sin(nj\theta)^t$.
- trouver pour quelles valeurs de α la matrice A est définie positive
- en deduire que le conditionnement de A pour $\alpha = 2$ en norme 2 est proportionnel à h^{-2}.