1. Dans la définition d'élément fini comme triplet d'objets (T, P, S), expliquer ce que ça veut dire que S est P-unisolvent. Illustrer a' l'aide d'un exemple votre explication.

2. On considère le problème suivant:

$$Pb_{ef}: \qquad \begin{cases} -\alpha\, u'' + \gamma\, u = f, & \text{sur } [0,1] \\ c_1 u'(0) + c_2 u(0) = 20 \\ u(1) = 10. \end{cases}$$

Donner la formulation variationnelle du problème Pb_{ef}. On précisera l'espace où l'on cherche la solution et celui où l'on prend les fonctions tests.

3. Soit $T > 0$. On rappelle que pour discretiser par différences finies le problème de Cauchy

$$Pb_{df}: \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction connue, on utilise le θ-schéma

$$\frac{1}{\delta t}(y_{k+1} - y_k) = \theta g(t_{k+1}, y_{k+1}) + (1-\theta) g(t_k, y_k), \qquad 0 \le k \le N,$$

où $y_k \approx y(t_k)$, avec $t_k = k\,\delta t$ et le pas de temps $\delta t = T/N$ calculé pour avoir une partition de $[0,T]$ en N intervalles de temps identiques, $N \ge 1$.

- Préciser pour quelle valeur de $\theta \in [0,1]$ et pourquoi, le θ-schéma est implicit et donner son expression.
- Montrer l'ordre de précision du θ-schèma dans le cas où $\theta = 0$, en s'appuyant sur les développements de Taylor.
- Soit $g(t, y(t)) = -\lambda y(t)$, avec $\lambda > 0$, et $y_0 = 1$. Enoncer et montrer la condition qui doit être satisfaite sur le pas de temps pour que la solution approchée du θ-schéma avec $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ soit stable pour $T \to +\infty$.