

1. Etant donné les quatre points (x_i, y_i) de coordonnées

$$(-1, 1), \quad \left(-\frac{1}{2}, -2\right), \quad (0, 2), \quad (1, -1),$$

construire le polynôme $p(x)$ de degré maximale r (à préciser dans la copie) qui interpole les valeurs y_i aux points x_i en utilisant les trois méthodes du cours:

- (a) la méthode de Lagrange;
 (b) la méthode de Newton;
 (c) la méthode de la matrice de Vandermonde construite sur la base des polynômes

$$\{T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}, \quad k \geq 1\}.$$

Calculer la valeur $p(\frac{1}{2})$.

2. Donner l'expression de la constante de Lebesgue Λ et présenter les éléments mathématiques qui apparaissent dans son expression.

Donner l'expression de l'opérateur I_n d'interpolation polynomiale de degré $\leq n$ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ en fonction d'une base cardinale $\{\varphi_i\}$.

Montrer que $\|I_n\|_\infty \leq \Lambda$ où $\|I_n\|_\infty = \sup_{g \in C^0([a,b]), g \neq 0} \frac{\|I_n g\|_\infty}{\|g\|_\infty}$.

3. Vrai ou faux, commenter ou proposer des contre-exemples pour les assertions suivantes:
- (a) L'interpolation polynomiale est de plus en plus précise à fur et à mesure que le degré du polynôme d'interpolation augmente.
- (b) Les polynômes de Lagrange sont un exemple de fonctions cardinales.
- (c) Ce n'est pas important comment la constante de Lebesgue augmente en fonction du degré polynomiale.

4. On considère l'intervalle $[-1, 1]$ de l'axe réel. On veut construire les fonctions cardinales de degré polynomiale 3, sous la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$, pour les degrés de liberté suivants:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : u &\mapsto u(-1), & \sigma_2 : u &\mapsto u(1), \\ \sigma_3 : u &\mapsto \frac{du}{dx}(-1), & \sigma_4 : u &\mapsto \frac{du}{dx}(1). \end{aligned}$$

Ecrire, sans le résoudre, le système linéaire pour calculer les coefficients a, b, c, d de chaque fonction cardinale.