FONCTIONS HARMONIQUES SUR LES VARIÉTÉS

ERWANN AUBRY

Stage de Maîtrise réalisé sous la Direction de G. Besson
Grenoble 1998

Le but du stage est d'aborder l'étude des fonctions harmoniques sur les variétés Riemanniennes. Il s'agit de rechercher les informations sur la géométrie d'une variété contenues dans l'opérateur Laplacien et plus précisément dans l'espace des fonctions harmoniques de croissance polynômiale. On cherche la généralisation au cas des variétés du résultat classique suivant sur les fonctions harmoniques de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des fonctions harmoniques à croissance polynomiale d'ordre au plus d (c'est-à-dire celles qui sont un O de $d(x,p)^d$, où p est un point quelconque de M), sur R^n muni de sa métrique usuelle, est de dimension dimension finie. Plus précisément, cet espace vectoriel, que l'on notera $H_d(R^n)$ est engendré par les polynômes harmoniques homogènes de degré au plus d. Il est donc de dimension $C_{n+d}^d - C_{n+d-1}^{d-1}$.

Ce sujet permet de découvrir un peu d'analyse sur les variétés: en plus de la définition du Laplacien sur les variétés Riemanniennes, il permet de se familiariser avec la régularité de la fonction distance, les inégalités de Poincaré, d'Harnack, les méthodes de Bochner, et l'étude de la variation du volume des boules géodésiques sur les variétés. Une part importante du travail fut de comprendre l'influence de la courbure de Ricci sur les propriétés géométriques et analytiques des variétés.

Le principal résultat énoncé dans ce rapport est le théorème suivant dû à T.Colding-W.Minicozzi (voir aussi P.Li [12]).

Théorème 1. *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète vérifiant les hypothèses (W) et (M) suivante*

(W) *Il existe des constantes $C_0, \nu > 0$ telles que pour tout $x \in M$, pour tout $R \geq r > 0$, on a*
$$\frac{V_x(R)}{V_x(r)} \leq C_0 (\frac{R}{r})^{\nu}$$
(où $V_x(r)$ est le volume de la boule géodésique de centre x et de rayon r).

(M) *Il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in M$, pour tout $r > 0$, et pour toute fonction sous-harmonique positive sur M, on a*
$$\lambda \int_{B_x(r)} f \geq V_x(r) f(x)$$
(où $B_x(r)$ désigne la boule géodésique de centre x et de rayon r).

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel de rang m, p un point fixe de M et $\rho(x) = d(x,p)$.

Si $S_d(M,E) \subset \Gamma(E)$ est un sous-espace linéaire de sections de E tel que tout $u \in S_d(M,E)$, vérifie

a,	$\triangle \mid u \mid^2 \leq 0$	*sous-harmonicité de u*
b,	$\lvert u \rvert \in \mathcal{O}(\rho^d)$	*croissance polynomiale d'ordre au plus d*

alors il existe une constante $C = C(C_0, \nu)$ tel que $\dim S_d \leq m C \lambda d^{\nu - 1}$.

Date:

Ce théorème fut d'abord conjecturé par S.-T. Yau, puis démontré par T. Colding et W. Minicozzi, et enfin démontré sous cette forme plus générale et de façon plus simple par P. Li.

La conjecture de S.T. Yau est, en fait plus forte. Ayant montré que, dans le cas des variétés à courbure de Ricci positive, les fonctions harmoniques bornées sont nécessairement constantes (résultat renforcé par S.Y. Cheng, qui montra que toute fonction harmonique strictement sous-linéaire est constante. Cf. partie 2), il conjectura que la dimension des espaces de fonctions harmoniques à croissance polynomiale de degré plus petit que d d'une variété de courbure de Ricci positive est plus petite que dans le cas de R^n, ce qui entraine en particulier que cette dimension est finie.

Ce rapport comporte deux parties. Dans la première, un peu technique, on démontre que les variétés à courbure de Ricci positive vérifient les hypothèses du théorème de T.Colding-W.Minicozzi, P.Li, et dans la seconde on présente des résultats sur l'étude des fonctions harmoniques à croissance polynomiale, ainsi que la démonstration due à P.Li du théorème cité plus haut.

1. Quelques propriétés des variétés à courbure de Ricci positive

1.1. La courbure de Ricci et le laplacien. La courbure de Ricci, comme toutes les autres notions de courbure, est un outil permettant l'étude locale des variétés Riemanniennes. Nous ne travaillerons, dans la suite, que dans le cadre Riemannien. C'est-à-dire que la connection de nos variétés est celle de Levi-Civita. Si (M,g) est une variété Riemannienne son tenseur de courbure est défini par

$$R(X,Y,Z,W)=g\big(D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]},W\big)$$

et vérifie les relations suivantes

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)=R(Y,X,W,Z)=R(Z,W,X,Y) \tag{1}$$

La courbure de Ricci, notée Ric, est une trace de R. Si $e_1,\cdots,e_n\in T_pM$ est une base orthonormée, alors on a

$$Ric(v,w)=tr_{13}R(v,w)=\sum_{i=1}^{n}R(e_i,v,e_i,w)=\sum_{i=1}^{n}R(v,e_i,w,e_i) \tag{2}$$

D'après les formules (1), Ric est une forme bilinéaire symétrique. On dira que la courbure de Ricci de M est minorée par k si Ric $-kg$ est une forme bilinéaire positive sur chaque espace T_xM. Pour toute fonction $f:M\to\mathbb{R}$ de classe C^2, on défini $\triangle f$ par

$$\triangle f=-tr_{12}Ddf=-\sum_i\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}-\sum_j\Gamma_{ii}^j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{3}$$

On a alors la formule suivante qui nous servira beaucoup dans la suite

$$\triangle(fh)=f\triangle h+h\triangle f-2g(\nabla f,\nabla h) \tag{4}$$

et la formule de Green

$$\int_U(f\triangle h-h\triangle f)dv_g=\int_{\partial U}(f\frac{\partial h}{\partial\nu}-h\frac{\partial f}{\partial\nu})\omega_{n-1} \tag{5}$$

où U est un ouvert tel que $\bar U$ soit une variété à bord, dv_g est la mesure Riemannienne de (M,g) et ω_{n-1} est la mesure induite sur la sous-variété ∂U.

Pour montrer que le théorème exposé par Li dans [Li1] se place bien dans le cadre de la conjecture de Yau nous devons montrer la croissance polynomiale du volume des boules et l'existence d'une inégalité de la moyenne pour les fonctions sous-harmoniques positives sur les variétés à courbure de Ricci positive.

1.2. **Régularité de le fonction distance.** Soit x un point donné de M, une variété compacte. On définit

$$U_x = \{v \in T_xM / \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } t \to exp_x(tv) \text{ minimise sur } [0, 1+\epsilon]\}$$

On trouvera en appendice la démonstration plus ou moins complète des faits suivants:

- U_x est un ouvert de M,
- M est la réunion disjointe de $\exp_x(U_x)$ et $\exp_x(\partial U_x)$,
- $\exp_x$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme sur son image
- $v_g(\exp_x(\partial U_x)) = 0$.

On notera $\exp_x(\partial U_x) = \mathrm{Cut}(x))$ et on dira que $p \in M$ est conjugué à x si $d_p \exp_x$ est non injective.

1.3. **Courbure de Ricci et croissance du volume des boules.** Les théorèmes de comparaison sont des outils permettant, sous de bonnes hypothèses sur la courbure (en général on minore la courbure de Ricci ou on encadre la courbure sectionnelle), de comparer la géométrie d'une variété avec celle d'une variété de référence de courbure sectionnelle constante. La première assertion découle directement de l'inégalité de Bishop-Gromov.

Théorème 2 (Bishop-Gromov). *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète dont la courbure de Ricci vérifie $Ric \geq (n-1)kg$, où k est un réel donné. Si $0 < r < R$, alors pour tout $x \in M$, on a*

$$\frac{V_x(R)}{V_x(r)} \leq \frac{V^k(R)}{V^k(r)}, \tag{6}$$

où $V^k(r)$ désigne le volume de la boule de rayon r dans l'espace complet de courbure sectionnelle constante égale à k (c'est-à-dire $\mathbb{R}^n$ si $k=0$, $\mathbb{S}^n(1/k)$ si $k>0$ et $\mathbb{H}^n(-1/k)$ si $k<0$).

Pour démontrer cette formule, on doit étudier les variations de la mesure Riemannienne de M en fonction de la distance à un point donné. Cette étude peut-être faite en passant par celle du Laplacien de la fonction distance à x sur M. Il est naturel de l'exprimer dans la carte normale centrée en un point x fixe. Soit $\Phi :]0, \infty[\times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow M$ l'inverse de la carte normale en x, i.e. $\Phi(r,u) = \exp_x(ru)$. On a alors $\Phi^* v_g = a(u,r) dr du$. Supposons $\Phi(r,u)$ non conjugué à x, alors pour tout U voisinage assez petit de u dans $\mathbb{S}^{n-1}$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on a

$$\int_{U \times [r, r+\epsilon]} a \triangle r dr du = \int_{\Phi(U \times [r,r+\epsilon])} (\triangle r) dv_g$$

d'où, par la formule de Green (5),

$$\begin{aligned} \int_{U\times[r,r+\epsilon]} a\triangle r dr du &= -\int_{\partial\Phi(U\times[r,r+\epsilon])} \frac{\partial r}{\partial \nu}\omega_{n-1} = \int_U a(u,r)du - \int_U a(u,r+\epsilon)du \\ &= \int_{U\times[r,r+\epsilon]} -\frac{\partial a}{\partial r} dr du \end{aligned}$$

Et, ce, pour tout U, r, ϵ. On a donc $(\triangle r = -\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial r})$ sur $M \setminus \mathrm{Cut}(x)$.

En fait, on peut montrer que $\triangle \rho$ se décompose en une partie régulière, que nous venons de calculer, définie sur U_x, et une partie singulière qui est une mesure négative à support dans $\mathrm{Cut}(x)$.

Pour mener plus loin notre étude de la fonction a, on a maintenant besoin de la formule de Bochner.

Proposition 1 (formule de Bochner). *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2$ sur (M,g), on a*

$$g\big(d(\triangle f), df\big) = |Ddf|^2 + \frac{1}{2}\triangle(|\ df\ |^2) + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{7}$$

Démonstration :

Les formules de Bochner sont les formules obtenues en traçant des formules de commutation de tenseurs. Ici on calcule la différence :

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z)$$

or, on a :

$$\begin{aligned} DDdf(X,Y,Z) &= X.Ddf(Y,Z) - Ddf(D_XY,Z) - Ddf(Y,D_XZ) \\ &= X.(Y.df(Z)) - X.df(D_YZ)) - (D_XY).df(Z) + df(D_{D_XY}Z) \\ &\quad -Y.df(D_XZ) + df(D_YD_XZ), \end{aligned}$$

d'où :

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z) = df(R(X,Y)Z) = R(X,Y,Z,\nabla f). \tag{8}$$

D'autre part :

$$DDdf(X,Y,Z) = DDdf(X,Z,Y) \tag{9}$$

(car $Ddf(Y,Z) - Ddf(Z,Y) = ([Y,Z] + D_ZY - D_YZ).df = 0$). En traçant la relation (8) et en utilisant (9), on obtient

$$\begin{aligned} tr_{12}DDdf(Y) &= D_Y(tr_{12}Ddf) + tr_{13}R(\nabla f, Y) \\ &= -d\triangle f(Y) + Ric(\nabla f, Y) \end{aligned} \tag{10}$$

Enfin, on a : $d(|\ df\ |^2)(X) = 2g(D_Xdf, df)$, d'où

$$\begin{aligned} Dd(|\ df\ |^2)(X,Y) &= 2g(D_Xdf, D_Ydf) + 2g(D_XD_Ydf, df) - 2g(D_{D_XY}df, df) \\ &= 2g(D_Xdf, D_Ydf) + 2g(DDdf(X,Y), df) \end{aligned}$$

soit, en traçant

$$-\frac{1}{2}\triangle|\ df\ |^2 = |\ Ddf\ |^2 + tr_{12}DDdf(\nabla f) \tag{11}$$

En combinant (10) et (11) on obtient la formule annoncée. ♢

En posant $f(x) = r = d(p,x)$ et en notant que $|dr| = 1$ et que

$$g(d(\triangle r), dr) = \frac{\partial}{\partial r}\triangle r = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{a'}{a} = -\frac{a''}{a} + (\triangle r)^2,$$

on obtient

$$-\frac{a''}{a} = |\ Ddr\ |^2 - (\triangle r)^2 + Ric(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}).$$

On pose alors $b = a^{\frac{1}{n-1}}$ et on a

$$(n-1)\frac{b''}{b} + Ric(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = -(|\ Ddr\ |^2 - \frac{1}{n-1}(\triangle r)^2) \leq 0.$$

La dernière inégalité étant une conséquence de l'inégalité de Schwarz (le $n-1$ provenant du fait que $Ddr(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = d(dr(\frac{\partial}{\partial r}))(\frac{\partial}{\partial r}) = d(1)(\frac{\partial}{\partial r}) = 0$).

En utilisant l'hypothèse sur la courbure (on remarquera qu'elle n'a pas été utilisée dans ce qui précède), on obtient

$$b'' + kb \leq 0.$$

on pose alors

$$f = \frac{b}{\bar{b}},$$

où $\bar{b}$ est solution de l'équation

$$\bar{b}'' + k\bar{b} = 0$$

avec pour conditions initiales $\bar{b}(0) = b(u,0) = 0$ et $\bar{b}'(0) = b'(u,0) = 1$. On pose aussi

$$f' = \frac{h}{\bar{b}^2}.$$

On a alors

$$h' = \bar{b}(b'' + kb) \leq 0,$$

donc h décroît.

On en déduit que f aussi décroît. On prolonge alors b en b^+, par 0 en dehors de son ensemble de définition - on remarquera que $\bar{b}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (mais peut être négative en courbure positive, ce qui ne correspond plus à une densité de volume), alors que b n'est définie que sur le segment de direction u contenu dans U_x. Alors $\frac{b^+}{\bar{b}}$ reste décroissante.

D'où :

$$\frac{V_x(R)}{V_x(r)} = \left[\frac{\int_0^R (b^+)^{n-1} dr}{\int_0^r (b^+)^{n-1} dr}\right] = 1 + \left[\frac{\int_r^R [b^+/b^+(r)]^{n-1} dr}{\int_0^r [b^+/b^+(r)]^{n-1} dr}\right],$$

$$\leq \frac{\int_0^R (\bar{b})^{n-1} dr}{\int_0^r (\bar{b})^{n-1} dr} = \frac{V^k(R)}{V^k(r)}.$$

♢

Remarque 1. *Dans la démonstration précédente, on a montré que la fonction g est négative pour $r \leq 0$. Ceci s'écrit aussi :*

$$\frac{b'}{b} \leq \frac{\bar{b}'}{\bar{b}}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} -\triangle r &\leq \frac{n-1}{r} \ \textit{si}\ k{=}0 \\ &\leq (n-1)\sqrt{-k}\, coth(\sqrt{-k}r) \ \textit{si}\ k < 0 \end{aligned}$$

soit, si $k \leq 0$, on a toujours :

$$-\triangle r \leq \frac{n-1}{r}(1 + \sqrt{-k}r). \tag{12}$$

Cette relation nous servira dans la suite. On peut interpréter cette comparaison du Laplacien de la distance comme un équivalent local du théorème de Bishop-Gromov. Encore une fois, cette relation est vraie sur tout M au sens des distributions.

1.4. **Courbure de Ricci et analyse sur les variétés.** Nous devons maintenant démontrer que sur les variétés à courbure de Ricci positive, une propriété de la valeur moyenne est vérifiée par les fonctions sous-harmoniques. Nous allons démontrer un résultat plus général, d'abord dû a J. Moser mais pour une classe d'opérateurs beaucoup plus générale que le simple Laplacien, mais, pour la preuve duquel nous suivrons la démarche de R.M. Schoen et S.T. Yau, qui offre un bon exemple des techniques classiques utilisées en analyse sur les variétés (à ce titre je conseille, pour ceux que le sujet intéresse, les livres de Schoen et Yau [17] et [18]).

Théorème 3. *Soit M une variété riemannienne complète vérifiant $Ric \geq -(n-1)kg$, où k est positive. Soit u une fonction positive et sous-harmonique sur M. Alors, pour tout $\tau \in]0,1/2[\,, p \in]0,2]$ et $R > 0$, on a*

$$sup_{B((1-\tau)r)} u^p \leq C_1 \tau^{-C_2(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(r))} \int_{B(r)} u^p dV \right), \tag{13}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes ne dépendant que de n et p.

On voit bien alors que dans le cas particulier d'une variété à courbure de Ricci positive ($k = 0$), on obtient l'inégalité (W).

Pour prouver ce théorème, quatre lemmes sont nécessaires. Le premier, qui est important en lui-même, et qui nous resservira dans la seconde partie, est une estimation du gradient du laplacien des fonctions harmoniques positives.

Lemme 1. *Soit M^n une variété Riemannienne complète vérifiant $Ric \geq -(n-1)kg$, où k est une constante positive. Soit u une fonction harmonique positive sur M et $B_x(r)$ la boule géodésique de centre x et de rayon r dans M. Alors on a*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \left(\frac{1 + r\sqrt{k}}{r} \right) \quad sur\ B_{r/2}(x), \tag{14}$$

où C_n est une constante ne dépendant que de n.

Démonstration :

En appliquant la formule de Bochner à u, on obtient :

$$\mid Ddu \mid^2 + \frac{1}{2} \triangle(\mid \nabla u \mid^2) - (n-1)k \mid \nabla u \mid^2 \leq 0$$

or :

$$\triangle(\mid \nabla u \mid^2) = 2 \mid \nabla u \mid \triangle(\mid \nabla u \mid) - 2 \mid \nabla(\mid \nabla u \mid) \mid^2,$$

d'où

$$(n-1)k \mid \nabla u \mid^2 - \mid \nabla u \mid \triangle(\mid \nabla u \mid) \geq \mid Ddu \mid^2 - \mid \nabla \mid \nabla u \mid\mid^2 \tag{15}$$

On peut alors choisir, en tout point p où $\nabla u \neq 0$ (on remarquera, pour la suite, qu'alors $\mid \nabla u \mid$ est localement C^∞), une carte normale telle que $u_1(p) = \mid \nabla u \mid (p)$, $u_i(p) = 0$ pour $i \geq 2$. On a alors :

$$\nabla_j(\mid \nabla u \mid) = \nabla_j(\sqrt{\sum u_i^2}) = \frac{\sum u_i u_{ij}}{\mid \nabla u \mid} = u_{1j},$$

d'ou :

$$\mid \nabla(\mid u \mid) \mid^2 = \sum_j u_{1j}^2.$$

De plus, on a :

$$\mid Ddu \mid^2 = \sum u_{ij}^2.$$

En mettant ces deux expressions dans (15), on trouve :

$$\begin{aligned} (n-1)k \mid \nabla u \mid^2 - \mid \nabla u \mid \triangle(\mid \nabla u \mid) &\geq \sum_{ij} u_{ij}^2 - \sum_j u_{1j}^2 \\ &\geq \sum_{i \neq 1} u_{i1}^2 + \sum_{i \neq 1} u_{ii}^2 \\ &\geq \sum_{i \neq 1} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1} (\sum_{i \neq 1} u_{ii})^2 \end{aligned}$$

Or $\triangle u = -\sum u_{ii} = 0$, donc $u_{11}^2 = (\sum_{i\neq 1} u_{ii})^2$. On obtient donc finalement (utilisant la symétrie de la matrice (u_{ij}))

$$(n-1)k|\nabla u|^2 - |\nabla u| \triangle(|\nabla u|) \geq \frac{1}{n-1}|\nabla(|\nabla u|)|^2.$$

On pose maintenant $\phi = \frac{|\nabla u|}{u}$. On va chercher à majorer $\triangle\phi$. On a alors, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} \triangle(|\nabla u|) &= u\triangle\phi - 2\nabla\phi.\nabla u \\ \triangle\phi &= \left(\frac{|\nabla u| \triangle(|\nabla u|)}{|\nabla u| u}\right) + \frac{2\nabla\phi.\nabla u}{u} \\ &\leq -\left(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(n-1)|\nabla u| u}\right) + (n-1)k\phi + \frac{2\nabla\phi.\nabla u}{u}. \end{aligned} \tag{16}$$

On pose $\epsilon = 2/(n-1)$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2} \\ \frac{2\nabla\phi.\nabla u}{u} &= (2-\epsilon)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} + \frac{\epsilon\nabla\phi.\nabla u}{u} \\ &= (2-\epsilon)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} + \epsilon\frac{\nabla(|\nabla u|).\nabla u}{u^2} - \epsilon\frac{|\nabla u|^3}{u^3} \\ &\leq (2-\epsilon)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} + \epsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} - \epsilon\frac{|\nabla u|^3}{u^3} \end{aligned} \tag{17}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} &= \epsilon\left(\frac{|\nabla|\nabla u||}{(|\nabla u| u)^{1/2}}\right).\frac{|\nabla u|^{3/2}}{u^{3/2}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u| u} + \frac{|\nabla u|^3}{u^3}\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u| u} + \phi^3\right). \end{aligned} \tag{18}$$

En faisant la synthèse des inégalités (16), (17) et (18) on obtient la majoration souhaitée

$$\triangle\phi \leq (n-1)k\phi + \left(2 - \frac{2}{n-1}\right)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} - \frac{1}{n-1}\phi^3.$$

Pour obtenir l'inégalité annoncée, on pose

$$F(y) = \left(r^2 - \rho(y)^2\right)\phi(y)$$

ou $\rho(y) = d(x,y)$. Puisque $F_{|\partial B_x(r)} = 0$, si u n'est pas constante, F atteint son maximum en un point x_0 intérieur à $B_x(r)$. Supposons, dans un premier cas, que x_0 n'est pas conjugué à x (c'est-à-dire que x_0 n'est pas dans le Cut-locus de x). Alors F est C^∞ au voisinage de x_0 (car ρ l'est et $F(x_0) \neq 0 \Rightarrow \Phi(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla u \neq 0$). On a donc :

$$\nabla F(x_0) = 0,$$
$$\triangle F(x_0) \geq 0.$$

Soit, en x_0 :

$$\frac{\nabla\rho^2}{r^2-\rho^2} = \frac{\nabla\phi}{\phi}, \tag{19}$$

$$\frac{\triangle\phi}{\phi}-\frac{\triangle\rho^2}{r^2-\rho^2}+\frac{2\nabla\rho^2.\nabla\phi}{(r^2-\rho^2)\phi}\geq 0.$$

D'où :

$$\frac{\triangle\phi}{\phi}-\frac{\triangle\rho^2}{r^2-\rho^2}+\frac{2\mid\nabla\rho^2\mid^2}{(r^2-\rho^2)^2}\geq 0.$$

Or, d'après la formule (12), on a :

$$\begin{aligned}-\triangle\rho^2 &= -2\rho\triangle\rho+2\mid\nabla\rho\mid^2\\ &= 2-2\rho\triangle\rho\\ &\leq 2+2(n-1)(1+\sqrt{k}\rho)\\ &\leq C(1+\sqrt{k}\rho),\end{aligned}$$

où C est une constante ne dépendant que de n. On a de plus

$$\mid\nabla\rho^2\mid=2\rho\mid\nabla\rho\mid=2\rho$$

et (d'après (19) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\frac{\nabla\phi.\nabla u}{\phi u}=\frac{2\rho\nabla\rho.\nabla u}{(r^2-\rho^2)u}\leq\frac{2\rho}{r^2-\rho^2}\phi.$$

En utilisant les résultats précédents, on a

$$0\geq\frac{1}{n-1}F^2-2C_1rF-C_2(1+\sqrt{k}r)^2r^2,$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de n. D'où :

$$\begin{aligned}F(x_0) &= \sup_{B(r)}F\\ &\leq (n-1)\left[C_1r+\sqrt{C_1^2r^2+\frac{C_2}{n-1}r^2(1+\sqrt{k}r)^2}\right]\\ &\leq C'_nr(1+\sqrt{k}r).\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{B_x(r/2)}\frac{\mid\nabla u\mid}{u}\leq C_n\left(\frac{1+\sqrt{k}r}{r}\right),$$

où C_n ne dépend que de n. Enfin, dans le cas où x_0 et x sont conjugués, on appelle σ une géodésique minimisante joignant x et x_0. Soit $\bar{x}$ un point de σ proche de x. Alors aucun point de σ n'est conjugué à $\bar{x}$, donc $\rho_{\bar{x}}(y)=d(\bar{x},y)$ est régulière sur un voisinage de σ. De plus, on a :

$$\rho_{\bar{x}}(y)+d(x,\bar{x})\geq\rho(y),$$

$$\rho_{\bar{x}}(x_0)+d(x,\bar{x})\geq\rho(x_0).$$

On pose alors :

$$\bar{F}(y)=\left[r^2-(\rho_{\bar{x}}+d(x,\bar{x}))^2\right]\frac{\mid\nabla u\mid}{u}.$$

On a alors

$$\bar{F}(y)\leq F(y),\ \bar{F}(x_0)=F(x_0).$$

On peut alors appliquer ce qui précède à $\bar{F}$, et passer à la limite quand $d(x,\bar{x})\to 0$. On obtient bien l'estimation annoncée.

Lemme 2. *Sous les hypothèses du théorème, si* $\triangle h = 0$ *et* $h \geq 0$ *sur* $B(r)$*, alors*

(20)
$$\sup_{B((1-\tau)r)} h \leq \tau^{-C(1+\sqrt{k}r)} \inf_{B((1-\tau)r)} h.$$

Démonstration :
Par l'estimation précédente, on a

$$\mid \nabla \log h \mid \leq C_1(1+\sqrt{k}r)\frac{1}{r-\rho},$$

où $\rho(x) = d(x, O)$ et O est le centre de $B(r)$. Soit x_1 un point de $B(r)$ tel que

$$h(x_1) = \sup_{B((1-\tau)r)} h.$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} \log \frac{h(x_1)}{h(O)} &\leq C_1(1+\sqrt{k}r)\int_0^{(1-\tau)r} \frac{ds}{r-s} \\ &= log\tau^{-C_1(1+\sqrt{k}r)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{B((1-\tau)r)} h(x) \leq h(O)\tau^{-C_1(1+\sqrt{k}r)}.$$

De même, on montre que :

$$h(O) \leq \left(\inf_{B((1-\tau)r)} h\right)\tau^{-C_1(1+\sqrt{k}r)}.$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient le résultat annoncé.

Lemme 3. *Supposons que* $\triangle u \leq 0$ *et* $u \geq 0$ *sur* $B(r)$*. Alors*

(21)
$$\int_{B(r)} \mid \nabla u \mid^2 \leq \frac{C}{\tau^2 r^2}\int_{B((1-\tau)r)} u^2.$$

Démonstration : Soit $\phi \in C_0^\infty(B(r))$ une fonction telle que $\phi = 1$ sur $B((1-\tau)r)$, $\phi = 0$ sur $\partial B(r)$, $0 \leq \phi \leq 1$, et $\mid \nabla\phi \mid \leq C/(\tau r)$. Alors, on a (en utilisant encore une fois la formule de Green et le fait que ϕ soit à support compact dans la boule ouverte $B(r)$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{B(r)} \phi^2 u \triangle u \\ &= \int_{B(r)} \phi^2 \mid \nabla u \mid^2 + 2\int_{B(r)} \phi u \nabla\phi.\nabla u. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{B(r)} \phi^2 \mid \nabla u \mid^2 &\leq -2\int_{B(r)} \phi u \nabla\phi.\nabla u. \\ &\leq 2\left(\int_{B(r)} \phi^2 \mid \nabla u \mid^2\right)^{1/2}\left(\int_{B(r)} u^2 \mid \nabla\phi \mid^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}\int_{B((1-\tau)r)} \mid \nabla u \mid^2 &\leq \int_{B(r)} \phi^2 \mid \nabla u \mid^2 \\ &\leq 4\int_{(B(r)} u^2 \mid \nabla \phi \mid^2 \\ &\leq \frac{C}{a^2r^2}\int_{B(r)} u^2.\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme.

Le dernier lemme dont nous aurons besoin est l'inégalité de Sobolev suivante

Lemme 4. *Soit M^n une variété complète telle que $Ric(M) \geq -(n-1)k$. Alors il existe des constantes positives C_1 et C_2, ne dépendant que de $p \geq 1$ et de n telles que :*

$$\int_{B(r)} \mid \phi \mid^p \leq C_1 r^p e^{C_2\sqrt{k}r}\int_{B(r)} \mid \nabla\phi \mid^p dV, \tag{22}$$

pour toute application ϕ Lipschitzienne et nulle sur $\partial B(r)$.

Démonstration :

Soit $x_1 \in \partial B(3r)$, et $\rho_1(x) = d(x_1, x)$. Si $x \in B(r)$, alors on a

$$-\triangle\rho_1 \leq \frac{n-1}{2r} + (n-1)\sqrt{k} = \alpha.$$

Or

$$\triangle e^{-2\alpha\rho_1} = -e^{-2\alpha\rho_1}\left(2\alpha\triangle\rho_1 + 4\alpha^2\right) \leq -2\alpha^2 e^{-2\alpha\rho_1}.$$

On remarquera que cette inégalité est vraie au sens des distributions. On a alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(B(r))$

$$\begin{aligned}2\alpha^2\int_{B(r)} \phi e^{-2\alpha\rho_1} dV &\leq 2\alpha\int_{B(r)} e^{-2\alpha\rho_1}\nabla\phi.\nabla\rho_1 dV \\ &\leq 2\alpha\int_{B(r)} e^{-2\alpha\rho_1} \mid \nabla\phi \mid dV.\end{aligned}$$

Puisque $2r \leq \rho_1 \leq 4r$ sur B(r), on a

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} \phi dV &\leq \alpha^{-1}e^{4\alpha r}\int_{B(r)} \mid \nabla\phi \mid dV \\ &\leq C_1 r e^{C_2\sqrt{k}r}\int_{B(r)} \mid \nabla\phi \mid dV.\end{aligned}$$

Par un argument de densité, on voit alors que l'inégalité précédente est vraie pour ϕ positive et lipschitzienne à support dans $B(r)$. En l'appliquant alors à $\mid \phi \mid^p$ et en appliquant Hölder, on obtient l'inégalité annoncée.

On va maintenant pouvoir montrer le théorème énoncé plus haut, d'abord dans le cas $p = 2$, puis dans le cas général. Soit $\beta = 1 - \tau/2$ et h la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle h = 0, & \text{dans } B(\beta r), \\ h = u, & \text{sur } \partial B(\beta r). \end{cases}$$

Alors on a $\triangle(u - h) \geq 0$ sur $B(\beta r)$. D'après le principe du maximum, on a

$$0 \leq u \leq h \text{ sur } B(\beta r).$$

D'où

$$\sup_{B((1-\tau)r)} u^2 \leq \sup_{B((1-\tau)r)} h^2 \leq C_1 \tau^{-C_2(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\int_{B((1-\tau)r)} h^2}{\mathrm{Vol}(B((1-\tau)r))} \right).$$

D'autre part, on a

$$\int_{B((1-\tau)r)} h^2 \leq 2 \int_{B((1-\tau)r)} u^2 + 2 \int_{B((1-\tau)r)} (h-u)^2.$$

Or $(h-u) \in C_0^2(B(\beta r))$. D'où

$$\begin{aligned} \int_{B(\beta r)} (h-u)^2 &\leq r^2 e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(\beta r)} \mid \nabla(u-h) \mid^2 \\ &\leq 2r^2 e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(\beta r)} \left[\mid \nabla h \mid^2 + \mid \nabla u \mid^2\right] \\ &\leq 4r^2 e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(\beta r)} \mid \nabla u \mid^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé le principe de Dirichlet, selon lequel $\int \mid \nabla f \mid^2$ est minimale pour les fonctions harmoniques à valeurs au bord fixées. On peut alors appliquer le lemme 3 pour obtenir :

$$\int_{B(\beta r)} (h-u)^2 \leq C\tau^{-2} e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(r)} u^2.$$

D'où :

$$\int_{B(\beta r)} h^2 \leq \left(C\tau^{-2} e^{C_3\sqrt{k}r} + 2 \right) \int_{B(r)} u^2.$$

Soit

$$\begin{aligned} \sup_{B((1-\tau)r)} u^2 &\leq \left(\frac{C_1 \tau^{-C_4(1+\sqrt{k}r)}}{\mathrm{Vol}[B((1-\tau)r)]} \right) \int_{B(r)} u^2 \\ &\leq C_1 \tau^{-C_4(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\mathrm{Vol}[B(r)]}{\mathrm{Vol}[B((1-\tau)r)]} \right) \left(\frac{\int_{B(r)} u^2}{\mathrm{Vol}[B(r)]} \right). \end{aligned}$$

Or, en calculant sa dérivée logarithmique, on obtient facilement que la fonction $r^{-n} e^{-(n-1)\sqrt{k}r}\, \mathrm{Vol}[B(r)]$ est décroissante, soit

$$\frac{\mathrm{Vol}[B(r)]}{\mathrm{Vol}[B((1-\tau)r)]} \leq (1-\tau)^{-n} e^{-\tau(n-1)\sqrt{k}r}.$$

D'où le résultat annoncé dans le cas $p = 2$. La démonstration du cas général se fait en itérant le cas $p = 2$. On sait d'après ce qui précède que $\forall \delta \in]0, 1/2], \forall \theta \in [1/2, 1-\delta]$

$$\sup_{B(\theta r)} u^2 \leq \delta^{-C(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\int_{B((\theta+\delta)r)} u^2 dV}{\mathrm{Vol}[B((\theta+\delta)r)]} \right).$$

Or, $\delta + \theta \geq 1/2$, d'où

$$\sup_{B(\theta r)} u^2 \leq \delta^{-C(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\int_{B((\theta+\delta)r)} u^2 dV}{\mathrm{Vol}[B(r/2)]} \right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_{B((\delta+\theta)r)} u^2 dV &\leq \sup_{B(\delta+\theta)r)} u^{2-p} \int_{B((\delta+\theta)r)} u^p dV\\ &\leq \left(\sup_{B(\delta+\theta)r)} u^2\right)^{1-p/2} \int_{B(r)} u^p dV.\end{aligned}$$

Si on pose

$$M(\theta) = \sup_{B(\theta r)} u^2$$

$$K = \frac{\int_{B(r)} u^p dV}{\mathrm{Vol}[B(r/2)]},$$

on a alors montré que $\forall \delta \in]0, 1/2], \forall \theta \in [1/2, 1-\delta]$

$$M(\theta) \leq K\delta^{-C(1+\sqrt{k}r)} M(\theta+\delta)^{1-p/2}.$$

En choisissant $\theta_0 = 1-\tau$ et $\theta_i = \theta_{i-1} + 2^{-i}\tau$, pour $i = 1, 2, 3, \cdots$

$$M(\theta_{i-1}) \leq K_1 2^{iC(1+\sqrt{k}r)} M(\theta_i)^{\lambda}$$

où $\lambda = 1-p/2$ et $K_1 = K\tau^{-C(1+\sqrt{k}r)}$. En itérant, on a

$$M(\theta_0) \leq K_1^{\sum_{i=1}^{j}\lambda^{i-1}} 2^{C(1+\sqrt{k}r)\sum_{i=1}^{j} i\lambda^{i-1}} M(\theta_j)^{\lambda^j}$$

pour tout $j \geq 1$. En faisant tendre j vers l'infini, on obtient

$$M(\theta_0) \leq \tau^{-C'(1+\sqrt{k}r)} \left[\frac{\int_{B(r)} u^p dV}{\mathrm{Vol}(B(r/2)}\right]^{2/p}$$

où C' ne dépend que de n et p. D'où

$$\sup_{B((1-\tau)r)} u^p \leq \tau^{-pC'(1+\sqrt{k}r)/2} \left[\frac{\int_{B(r)} u^p dV}{\mathrm{Vol}[B(r/2)]}\right].$$

On conclut alors en utilisant le même théorème de comparaison des volumes que dans le cas $p = 2$.

2. Les fonctions harmoniques à croissance polynomiale

Une fois démontrés les lemmes techniques de la première partie, nous passons à une partie beaucoup moins fastidieuse. On l'a vu, une des idées cachées derrière l'étude des fonctions harmoniques sur les variétés est de trouver les invariants caractéristiques de la métrique dans le comportement du Laplacien. Une première étude menée dans ce sens est celle des fonctions harmoniques bornées sur les variétés complètes. On va rappeler brièvement des résultats qui illustrent la dépendance du Laplacien vis-à-vis de la métrique (plus particulièrement de la courbure).

(1) l'exemple du disque hyperbolique, conformément équivalent au disque usuel (donc admettant les mêmes fonctions harmoniques) montre qu'en courbure sectionnelle négative, le nombre de fonctions harmoniques bornées peut-être très grand (au moins égale au nombre de fonctions continues sur le cercle d'après le théorème de Dirichlet).

(2) Un résultat de P.Li et F.Tam montre que sur les variétés à courbure sectionnelles positives à l'infini les choses sont bien mieux contrôlables. En effet, une variété complète vérifiant ces hypothèses a un nombre de bouts fini (on appelle nombre de bout d'une variété relativement à une partie compacte de la variété le nombre de composantes non bornées de son complémentaire. Le nombre de bouts de la variété est la borne supérieure (finie

ou non) de ces nombres) que les auteurs classent en deux catégories : Si E est un bout, on pose $V_E(t) = \mathrm{Vol}(E \cap B_p(t))$. Alors, si la fonction $\frac{t}{V_E(t)}$ est intégrable, on dit que le bout est non parabolique; sinon, on dit qu'il est parabolique. Alors les auteurs ont montré que pour chaque bout non parabolique, on peut construire une fonction harmonique bornée qui tend asymptotiquement vers 1 sur ce bout, et vers 0 sur tous les autres bouts non paraboliques (ils montrent aussi que pour chaque bout parabolique il existe une fonction harmonique qui tend vers l'infini le long de ce bout, qui est bornée le long de tous les autres bouts paraboliques, et qui tend asymptotiquement vers 0 le long des bouts non paraboliques). Ils en déduisent que la dimension de l'espace des fonctions harmoniques bornées est égale au nombre de bouts non paraboliques (et que la dimension de l'espace des fonctions harmoniques bornées d'un côté est égale au nombre total de bouts).

(3) Le cas de la courbure de Ricci positive est plus délicat que le précèdent puisque l'hypothèse sur la courbure est plus faible. En se référant au théorème structurel des variétés complètes de courbure de Ricci positive de Cheeger-Gromoll dont on déduit que de telles variétés n'ont qu'au plus deux bouts, on peut s'attendre à ce que la dimension de l'espace des fonctions harmoniques bornées soit de dimension finie. En fait on a le résultat suivant plus fort :

Théorème 4. *Toute fonction harmonique de croissance strictement sous-linéaire (i.e. il existe $x_0 \in M$ tel que $f(x) = o(d(x_0, x))$) sur une variété à courbure de Ricci positive est constante.*

La démonstration est simple une fois démontrée l'estimation du gradient du log des fonctions harmoniques positives donnée dans la partie précédente.

Soit $A = \sup_{B(r)} \mid f \mid$. Alors $h = f + A + \epsilon > 0$ sur $B(r)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sup_{B(r/2)} \mid \nabla f \mid &= \sup_{B(r/2)} \mid \nabla h \mid \\
&\leq \frac{C_n}{r} \sup_{B(r/2)} (f + A + \epsilon) \\
&\leq \frac{2C_n}{r} (\sup_{B(r)} f + \epsilon/2).
\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat recherché en faisant tendre ϵ vers 0, puis r vers l'infini.

Une telle rigidité des fonctions harmoniques sur les variétés à courbure de Ricci positives inspira a Yau la conjecture suivante :

conjecture 1. *Soit M^n une variété complète à courbure de Ricci positive. Si on note$\mathcal{H}_d(M)$ l'ensemble des fonctions harmoniques à croissance d'ordre au plus d sur M, alors on a :*

$$dim\mathcal{H}_d \leq dim\mathcal{H}_d(R^n).$$

On rappelle que $\mathcal{H}_d(R^n)$ est composé des polynômes homogènes harmoniques de degré au plus d. On a donc $dim\mathcal{H}_d = C^d_{n+d} - C^{d-1}_{d+n-1} = O(d^{n-1})$.

Jusqu'au travaux de Colding et Minicozzi cette conjecture n'avait été démontrée que dans le cas d=1 et n=1 par Li et Tam.

Dans le cas d=1, ils ont montré que si M^n est une variété à courbure de Ricci tel que le volume des boules géodésique est d'ordre au plus k, alors $dim\mathcal{H}_1(M) \leq dim\mathcal{H}_1(R^k)$.

Dans le n=2, ils ont montré que si M est une variété dont la partie négative de la courbure est intégrable, alors pour tout bout e_i :

$$\alpha_i = 1 - lim_{r\to\infty}\frac{V_{e_i}(r)}{\pi r^2} \text{ existe}$$

et pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} dim\mathcal{H}_{d(1-\alpha_i)-\epsilon}(R^2) - k' \leq dim\mathcal{H}_d(M) \leq \sum_{i=1}^{k} dim\mathcal{H}_{d(1-\alpha ß)}(R^2)$$

avec $k' = card\{i/\alpha_i = 1\}$ et, par convention : $dim\mathcal{H}_d(M) = 0$ si $d < 0$. De plus il y a égalité dans la seconde inégalité si la courbure est positive à l'infini. En remarquant alors qu'en courbure partout positive, les surfaces sont soit isométrique à $R \times S^1$, soit elles n'ont qu'un bout.

Ces deux résultats partiels vis-à-vis de la conjecture de Yau donnent toutefois des résultats beaucoup plus forts que ceux conjecturés. En particulier, ils laissent penser que le R^n par rapport auquel on compare le comportement harmonique de nos variétés n'est pas celui ayant la même dimension, mais celui ayant la même croissance des volumes.

La méthode de P. Li exposée dans [12] pour démontrer le théorème cité en introduction, est beaucoup plus simple que les méthodes successivement utilisées par Colding et Minicozzi. De plus elle démontre un théorème plus général comme nous le montrerons dans la suite. L'idée de la démonstration est de considérer les formes bilinéaires symétriques positives suivantes sur $H_d(M)$:

$$< f, g >_r = \int_{B_p(r)} fg d\nu$$

Si K est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H_d(M)$, alors, ce sont des produits scalaires pour r assez grand. L'idée est alors de comparer les boules unités de $H_d(M)$ pour ces différentes métriques. Plus particulièrement, on étudie $detA_r^{r'}$ où $A_r^{r'}$ est définie par $< .,. >_r = < A_r^{r'}.,. >_{r'}$.

La démonstration se décompose alors en deux lemmes. Le premier démontre que si M est une variété complète à croissance polynomiale des volumes (hypothèse (W)), et K est un espace vectoriel de dimension k dont les éléments vérifient une inégalité de la moyenne (M), alors on a :

$$k \leq \frac{m\lambda C(2d)^{\nu-1}}{\left(detA_r^{(1+1/2d)r}\right)}.$$

Enfin, le deuxième lemme montre que si les éléments de K sont a croissance polynomiale d'ordre au plus d, et M vérifie (W), alors on a :

$$detA_r^{(1+1/2d)r} \geq \left(1 + \frac{1}{2d}\right)^{-k(2d+\nu+\delta)}.$$

En combinant les deux inégalités on a que la dimension k du sous-espace de $H_d(M)$ est majoré par une constante ne dépendant que de d et des caractéristiques de M. On en déduit que $H_d(M)$ est de dimension finie, et que sa dimension est majorée par la constante précédente, d'où le théorème annoncé.

Théorème 5 (Colding-Minnicozzi, Li). *Soit M^n une variété complète vérifiant les hypothèses (W) et (M), et E un fibré vectoriel de rang m sur M. Si $S_d(M, E) \subset \Gamma(E)$ est un sous-espace linéaire de section de E tel que $\forall u \in S_d(M, E)$ on a*

a): $\triangle| u |^2 \geq 0$

b): $| u | (x) \in \mathcal{O}(\rho^d(x))$

alors $\exists C(C_o, \nu) > 0$ *tel que* $dimS_d(M) \leq mC\lambda d^{\nu-1}$

Lemme 5. *Soit K un espace vectoriel de dimension k de sections d'un fibré E de rang m sur une variété M^n. Si M vérifie les hypothèses (W) et (M) et que $\forall u \in K, \triangle |\, u\,|^2 \geq 0$, alors quelque soit la base (u_i) de K, $p \in M$, $r > 0$, $\epsilon \in]0, 1/2[$, on a*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{B_p(r)} |\, u_i\,|^2 \leq mC\lambda\epsilon^{-(\nu-1)} \sup_{u\in\{<A,U>\}} \int_{B_p((1+\epsilon)r)} |\, u\,|^2 \qquad \textit{pour } \nu > 1$$

où $A = (a_i)$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^k etU = (u_i)$ et C ne dépend que de C_0 et de ν.

Remarque 2. *le lemme précédent peut s'énoncer dans les cas $\nu = 1$ et $\nu < 1$ en remplaçant $\epsilon^{\nu-1}$ respectivement par $ln\epsilon$ et 1.*

Démonstration : Pour tout $x \in B_p(r)$ on définit le sous espace $K_x = \{u \in K/u(x) = 0\}$ de K. On peut voir K_x comme le noyau d'une application linéaire de K dans l'espace vectoriel E_x de dimension m. On en déduit donc que K_x est de codimension au plus m. On peut alors construire par changement de base orthonormée une base (v_i) de K telle que $v_i \in K_x, \forall i \in [m+1, k]$. Alors $\sum_{i=1}^{k} |\, u_i\,|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\, v_i\,|^2$. On a donc :

$$\begin{aligned} |\, v_i\,|^2 &\leq \frac{\lambda}{V_x(r(1+\epsilon)-\rho(x))} \int_{B_p((1+\epsilon)r)} |\, v_i\,|^2 \\ &\leq \frac{\lambda C_0[2(1+\epsilon)]^{-\nu}}{V_p(r)} (\left[\sup_{u\in<A,U>} \int_{B_p((1+\epsilon)r)} |\, u\,|^2 \right] ((1+\epsilon) - \frac{\rho(x)}{r})^{-\nu} \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{B_p(r)} |\, u_i\,|^2 \leq \frac{\lambda mC}{V_p(r)} (\sup_{<A,U>} \int_{B_p((1+\epsilon)r)} |\, u\,|^2) \int_{B_p(r)} ((1+\epsilon) - \frac{\rho(x)}{r})^{-\nu}.$$

On pose alors $f(\rho) = ((1+\epsilon) - \frac{\rho}{r})^{-\nu}$. Il ne reste plus qu'à étudier $\int_0^r A_p(\rho) f(\rho) d\rho$, où $A_p(\rho) = \mathrm{Vol}(S_p(\rho))$. Soit $\alpha = 2^{1/q}$ avec q assez grand pour que $\alpha \leq 1 + \epsilon/2$.

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^r A_p(\rho)f(\rho)d\rho &= \int_0^{r/2} A_p(\rho)f(\rho)d\rho + \sum_{i=0}^{q-1}\int_{\frac{\alpha^i r}{2}}^{\frac{\alpha^{i+1}r}{2}} A_p(\rho)f(\rho)d\rho \\
&\leq 2^\nu V_p(r) + \sum_{i=0}^{q-1} f(\frac{\alpha^{i+1}r}{2})[V_p(\frac{\alpha^{i+1}r}{2}) - V_p(\frac{\alpha^i r}{2})] \\
&\leq CV_p(r) + \sum_{i=0}^{q-1} ((1+\epsilon) - \frac{\alpha^{i+1}}{2})^{-\nu} V_p(\frac{\alpha^i r}{2})[C_0\alpha^\nu - 1] \\
&\leq CV_p(r)(1 + \sum_{i=0}^{q-1} ((1+\epsilon) - \frac{\alpha^{i+1}}{2})^{-\nu}) \\
&\leq CV_p(r)(1 + \sum_{i=0}^{q-1} ((1+\epsilon) - \frac{(1+\epsilon/2)\alpha^i}{2})^{-\nu}) \\
&\leq CV_p(r)(1 + \int_{-\infty}^q ((1+\epsilon) - (1+\epsilon/2)\frac{\alpha^\rho}{2})^{-\nu} d\rho) \\
&= CV_p(r)(1 + \frac{1}{ln\alpha}\int_0^2 [(1+\epsilon) - (1+\epsilon/2)\frac{\rho}{2}]^{-\nu} d\rho \\
&= V_p(r)O(\epsilon^{-\nu+1})
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Lemme 6. *Soit K un espace vectoriel de dimension k de section d'un fibré E sur M. Si M a une croissance des volumes d'ordre au plus ν et tout u dans K est de croissance polynomiale d'ordre au plus d, alors $\forall p \in M$, $\forall\beta > 1$, $\forall\delta > 0$, $\forall r_0 > 0$, $\exists r > r_0$ tel que si $\{u_i\}$ est une base orthonormée de K pour le produit scalaire $A_{\beta r} = \int_{B_p(\beta r)} < u, v >$, on a $\sum_{i=1}^k \int_{B_p(r)} \mid u_i \mid^2 \geq k\beta^{-(2d+\nu+\delta)}$.*

Démonstration : Soit $(v_i)_{i=1}^k$ une base de K $A_{\beta r} - orthonormee$. D'après les hypothèses sur la croissance des volumes dans M et celle des u_i, on a :

$$\int_{B_p(r)} \mid v_i \mid^2 \leq C(1 + (\beta r)^{2d+\nu})$$

or :

$$(det_r A_{\beta^j r})^{1/k} \leq \frac{1}{k} tr_r A_{\beta^j r}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
det_r A_{\beta^j r} &\leq C^k(1 + r^{2d+\nu}\beta^{j(2d+\nu)})^k \\
&\leq C'2^k r^{k(2d+\nu)}\beta^{jk(2d+\nu)}
\end{aligned}$$

or, si le lemme est faux, on a :

$$\forall r > r_0, tr_{\beta r} A_r < k\beta^{-(2d+\nu+\delta)}$$

d'où :

$$det_{\beta r} A_r < \beta^{-k(2d+\nu+\delta)}$$

et :

$$\forall j \in N^*, det_{\beta^j r} A_r = \prod_{k=0}^{j-1} det_{\beta^{k+1} r} A_{\beta^k r} < \beta^{-jk(2d+\nu+\delta)}$$

soit :

$$det_r A_{\beta^j r} = (det_{\beta^j r} A_r)^{-1} > \beta^{jk(2d+\nu+\delta)},$$

dont on tire une contradiction quand j est grand.

Cette théorème démontre la finitude de la dimension des $H_d(M)$, mais n'approche la conjecture de Yau qu'à un O près (contrairement aux cas n=2 et d=1). Toutefois il s'applique à des variétés beaucoup plus générales que celles à courbure de Ricci positive (et que celles traitées dans les articles de Colding et Minicozzi) puisqu'il s'applique à des variétés admettant des fonctions harmoniques bornées non constantes (par exemple $R^n \# R^n$ pour $n \geq 3$). De même, ils'applique à des opérateurs plus généraux que le Laplacien; tout opérateur dont le noyau est composé de fonctions vérifiant une inégalité de la moyenne de type (M). Grâce aux travaux de Saloff-Coste on sait qu'ils sont nombreux. On peut citer les opérateurs elliptiques $L = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ et $L = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ où (a_{ij}) est uniformément bornée.

On peut alors citer deux corollaires intéressants:

(1) Si M^n est une surface minimale de R^N, il existe $p \in M$ tel que $V(B_p(r) \cap M) \leq C_0 r^n$ et L est un opérateur uniformément elliptique sur M, alors l'espace des fonctions L-harmonique à croissance polynomiale d'ordre au plus d est de dimension finie majorée par Cd^{n-1}, où C ne dépend que de M et des constantes d'ellipticité de L.
(2) Si M est quasi isométrique à une variété à courbure de Ricci positive, alors, $dim H_d(M) \leq Cd^{n-1}$.

ce résultat de finitude des dimensions des $H_d(M)$ ouvre le champ d'une nouvelle recherche : les suites $dim H_d(M)$ sont elles des invariants caractéristiques de la géométrie d'une variété par isométrie ou quasi-isométrie. On peut citer un premier résultat dans ce domaine dû à Colding, Minicozzi et Cheeger : Si $dim H_1(M^n) = n+1$ alors M est isométrique à R^n. Si $dim H_1(M) = k+1$, alors le cône à l'infini de M est isométrique à $N \times R^k$ (où N est un cône, éventuellement singulier).

3. APPENDICE : La fonction distance

On commence par rappeler le théorème suivant du cours de TDGR.

Théorème 6. *Hopf-Rinow on a équivalence entre les propositions suivantes :*

(1) *(M,g) est géodésiquement complète.*
(2) *$\forall x \in M$, esp_x est définie sur tout T_xM.*
(3) *$\exists x \in M/$ exp_x est définie sur tout T_xM.*
(4) *toute parie fermée et bornée de M est compacte.*
(5) *(M,d) est un espace métrique complet.*

De plus, toutes ces propriétés impliquent que tout point de M peut-être joint à x par une géodésique minimisante.

Corollaire 1. *Soit (M,g) une variété riemannienne complète et c une géodésique.*

(1) *s'il n'existe pas de géodésique plus courte de $c(t_0)$ à $c(t_1)$ alors c est minimisante sur $[t_0, t_1]$.*
(2) *s'il existe une géodésique de même longueur que c reliant $c(t_0)$ à $c(t_1)$ alors c ne minimise plus sur $[t_0, t_1+\epsilon]$, $\forall \epsilon > 0$.*
(3) *si c minimise sur $[t_0, t_1]$, c minimise sur tout intervalle de $c[t_0, t_1]$.*

Démonstration : le 1, et le 3, sont évident. Pour le 2, soit γ une autre géodésique de même longueur que c entre $c(t_0)$ et $c(t_1)$. Alors on a $\gamma'(t_1) \neq c'(t_1)$. On pose $\Phi = \gamma$ sur $[t_0, t_1]$ et $\Phi = c[t_1, t_0]$. Alors Φ est C^1 par morceaux mais non régulière, d'où, si $\bar{\gamma}$ est la géodésique minimisante entre $\gamma(t_1-\epsilon)$ et $c(t_1+\epsilon)$, on a $L(\Phi_{[t_1-\epsilon, t_1+\epsilon]} > L(\bar{\gamma})$. Alors le chemin C^1 par morceaux que l'on construit en suivant γ pendant une temps $t_1 - \epsilon$ puis $\bar{\gamma}$ est de longueur strictement inférieure à celle de c sur $[t_0, t_1+\epsilon]$.

On en déduit facilement que $M = exp_x(U_x) \amalg Cut(x)$ et que $exp_x : U_x \to M$ est injective. Il reste a montrer que $Texp_x$ est injective sur U_x, que U_x est un ouvert et que $\mathrm{Cut}(x)$ est de mesure nulle.

Pour cela nous allons introduire la notion de champs de Jacobi.

Définition 1. *Soit M et N deux variétés riemannienne. On appelle sous-variété de M paramétrée par N toute application $H : N \to M$ de classe C^1. Dans le cas particulier où $N = [-\epsilon, \epsilon] \times [t_0, t_1]$, H sera appelée variation du chemin $s \to H(0, s)$.*

On appelle champ de vecteur le long de H toute application C^1 $Y : N \to M$ telle que $Y(x) \in T_{H(x)}M$, $\forall x \in M$.

On a alors la notion de dérivée covariante suivante :

Proposition 2 (et définition)**.** *La dérivée covariante le long de H est l'unique opérateur $\bar{D}$ qui, à tout couple (X,Y) composé d'un champ de vecteur X sur N et d'un champ le long de H Y, associe le champ de vecteur $\bar{D}_X Y$ (le long de H) tel que :*

(1) *$(X,Y) \to \bar{D}_X Y$ est bilinéaire.*
(2) *$\bar{D}_{fX} Y = f\bar{D}_X Y$ et $\bar{D}_X fY$, $\forall$ f C^∞ sur N.*
(3) *$\bar{D}_X Y_{|x} = D_{T_x H(X)} \tilde{Y}$ si $\exists \tilde{Y}$ défini sur un voisinage de $H(x_0)$ dans M tel que $\tilde{Y}(H(x)) = Y(x)$ (où D est la connexion canonique sur M).*

Cette propriété et le suivante se démontrent facilement en passant en coordonnées locales. On note $\bar{Z}_x = T_x H(Z(x))$.

Proposition 3. *$\forall (X,Y)$ champ de vecteur sur N et $\forall (S,T)$ le long de H, on a :*

(1) $\bar{D}_X \bar{Y} - \bar{D}_Y \bar{X} = [X,\bar{Y}]$.
(2) $X.g(S,T) = g(\bar{D}_X S, T) + g(s, \bar{D}_X T)$.
(3) $\bar{D}_X \bar{D}_Y S - \bar{D}_Y \bar{D}_X S - \bar{D}_{[X,Y]} S = R(\bar{X}, \bar{Y})S$ *où R est le tenseur de courbure de M.*

Soit c une géodésique de M et Y un champ le long de c. Alors la variation $H(s,t) = exp_{c(s)}(t.Y(c(s))$ est une variation de c telle que $\frac{\partial}{\partial t}H(s,0) = Y(c(s))$. Donc tout champ le long de c peut être vu comme un vecteur tangent en cette géodésique à l'ensemble des chemins de M.

On peut alors présenter les champs de Jacobi comme étant la dérivée d'une variation h telle que $s \to H(s,t)$ est une géodésique pour tout t au voisinage de 0.

Proposition 4. *Soit c une géodésique. Y un champ le long de c'est un champ de Jacobi si et seulement si*

$$\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y + R(Y, c')c' = 0.$$

Démonstration : Si $Y = \frac{\partial}{\partial t} H(s,0) = \frac{\bar{\partial}}{\partial t}$, alors :

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} &= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} + \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right], \\
&= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} + R(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t})\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \\
&= -R(Y, c')c'.
\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\gamma(t) = exp_{c(o)}(tY(o))$, X_0 et X_1 les champs parallèles le long de γ tels que $X_0(0) = c'(0)$ et $X_1(0) = \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y(0)$. Soit $H(s,t) = exp_{\gamma(t)}[s(X_0(t) + tX_1(t))]$ alors $Z(s) = \frac{\bar{\partial}}{\partial t}(s,0)$ est un champ de Jacobi, donc vérifie la même equation différentielle linéaire que Y, avec :

$$\begin{aligned} Z(0) &= \gamma(0) = Y(0) \\ Z'(o) &= (\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\bar{\partial}}{\partial s})(0,0) \\ &= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}(X_0(t) + tX_1(t))(0) = X_1(0) \\ &= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y(0) = Y'(0) \end{aligned}$$

D'où Y=Z.

Corollaire 2. *Soit $x \in M$, $u, v \in T_xM^2$, $c : r \to exp_x(rv)$, Y le champ de Jacobi tel que Y(0)=0 et Y'(0)=u. Alors :*

$$Y(r) = T_{rv}exp_x(ru).$$

Démonstration : Il suffit de considérer la variation $H(t,s) = exp_x(s(v + tu))$ et d'utiliser l'unicité des champs de Jacobi à Y(0) et Y'(0) donnés.

Définition 2. *Soit $c : [a,b] \to M$ une géodésique. s_1 est un point conjugué de a si et seulement si il existe un champ de Jacobi non nul tel que $Y(a) = Y(s_1) = 0$.*

On remarquera que $c(s_1)$ ne dépend pas de la vitesse de parcours de la géodésique. On admettra la prochaine propriété, car sa démonstration nécessite l'introduction des formules de variation première et seconde. On pourra trouver sa démonstration dans [G-H-L].

Proposition 5. *Soit $c : [a,b] \to M$ une géodésique, c(a)=p et c(b)=q.*

(1) *s'il existe $s_1 \in [a,b]$ conjugué à a, alors il existe une variation c_t de c telle que $L(c_t) < L(c)$, $\forall t > 0$ assez petit.*
(2) *s'il n'existe pas de point conjugué à a dans $[a,b]$ alors pour toute variation de c à extrémités fixées c_t, on a $L(c_t) \leq L(c)$ pour t assez petit.*

On en déduit que Conj (x) est contenu dans Cut(x), et que Cut(x) est réunion de l'ensemble des points conjugués et des points de M admettant deux géodésiques distincts les joignant à x.

On définit$\rho(v) = Sup\{t > 0/exp_x(sv)$ soit minimisant sur $[0,t]\}$, on a alors $U_x = \{v \in T_xM/ \mid v \mid< \rho(v)\}$ et ρ est définie sur S_x^n à valeurs dans $\bar{R}_+$.

En fait, on pourrait même montrer que ρ est continue. On en déduit que U_x est un ouvert. Ainsi, en utilisant le théorème d'inversion locale, on a que $exp_x : U_x \to M - Cut(x)$ est un difféomorphisme C^∞. Or $d(.,x) : M - Cut(x) \to R_+, p \to \mid exp_x^{-1}(p)|_{T_mM}$. Il ne reste plus qu'à montrer que Cut(x) est de mesure nulle. On remarque que U_x est un ouvert étoilé. En particulier, tout rayon $exp_x(rv)$ ne rencontre Cut(x) qu'une seule fois. on a donc :

$$v_g(Cut(x)) = \int_M 1_{Cut(x)} dv_g = \int_{S^n} \left(\int_{R_+} \rho(v) dr \right) \omega_{n-1} = 0.$$

References

[1] J. Cheeger, T. Colding, W. Minicozzi, *Linear growth of harmonic functions on complete manifolds of non-negative Ricci curvature*, Geom. Func. Anal. 5 (1995), 948-954.

[2] J. Cheeger, D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 6 (1971), 119-128.

[3] J. Cheeger, D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. Math. 92 (1972), 413-443.

[4] S.Y. Cheng, *Liouville theorem for harmonic maps, Geometry of the Laplace operator*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 36, AMS, 1980, pp. 147-151.

[5] S.Y. Cheng, S.T. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 333-354.

[6] T. Colding, W. minicozzi, *Harmonic functions with polynomial growth*, J. Diff. Geom. 46 (1997), n. 1.
[7] T. Colding, W. minicozzi, *Harmonic functions on manifolds*, Ann. of Math. 146 (1997), no. 3, 725-747.
[8] T. Colding, W. Minicozzi, *Weyl type bounds for harmonic functions*, Invent. Math. 131, 257-298 (1998).
[9] T.Colding, W.Minicozzi *Liouville theorems for harmonic sections and applications* , Comm. Pure Appl. Math. 51 (1998), no. 2, 113-138.
[10] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1993.
[11] E. Hebey *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Fondation*, Diderot éditeur, 1997.
[12] P. Li, *Polynomial growth of harmonic sections*, Math. Research Letters 4, 35-41 (1997).
[13] P. Li, *Curvature and function theory on Riemannian manifolds*, Surveys in differential geometry, 375-432, Surv. Differ. Geom., VII, Int. Press, Somerville, MA, 2000.
[14] P. Li, L. F. Tam, *Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative Ricci curvature outside a compact set*, Ann. Math. 125 (1987), 171-207.
[15] P. Li, L. F. Tam, *Linear growth harmonic functions on a complete manifold*, J. Diff. Geom. 29 (1989), 421-425.
[16] P. Li, L. F. Tam, *Complete surface with finite total curvature*, J. Diff. Geom. 33 (1991), 139-168.
[17] *R. Schoen, S.-T. Yau*, *Lectures on differential geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994.
[18] *R. Schoen, S.-T. Yau*, *Lectures on harmonic maps*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, II. International Press, Cambridge, MA, 1997.