

Analyse numérique d'une méthode intégrale frontière sans
singularité - Application à l'électromagnétisme.

Pierre Dreyfuss

8 novembre 1999

Remerciements

La réalisation de ce travail de thèse n'aurait pas pu se faire sans l'appui de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

En premier lieu j'adresse ma reconnaissance à mon directeur de thèse le Professeur J. Rap-paz. Son sérieux et sa compétence m'ont été très utiles pour mener à bien ce travail.

Je souhaite aussi vivement remercier les Professeurs M. Lenoir, J.C. Nédelec, A. Quarteroni et G. Wanner qui m'ont fait l'honneur d'être membre du jury, ainsi que le Professeur P. Buser qui a présidé le jury.

Je remercie le Fonds National Suisse ainsi que la Commission pour la Technologie et l'Inno-vation, qui ont partiellement financé ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant envers le docteur Eric Boillat, qui m'a apporté une aide scientifique précieuse.

Enfin, je remercie mes collègues du Département de Mathématiques de l'EPFL, et toutes les personnes, famille, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Version abrégée

La partie principale de cette thèse concerne l'analyse numérique d'une méthode intégrale frontière sans singularité. Nous considérons le problème de Laplace à l'intérieur ou à l'extérieur d'un domaine borné du plan. Notre méthode consiste à résoudre numériquement un tel problème, en inversant (sur un espace d'éléments finis) un opérateur intégral régulier qui est une "perturbation géométrique" de l'opérateur de Steklov. Nous définissons précisément comment doit-être la relation entre la perturbation géométrique et la dimension de l'espace d'éléments finis, afin d'obtenir un schéma numérique stable et convergent. De plus le schéma obtenu ne fait pas apparaître d'intégrale singulière.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à des processus de chauffage par induction électromagnétique lorsqu'un champ magnétique sinusoïdal est appliqué, dans le but de déterminer le champ de température lorsque le courant circulant dans l'inducteur est connu. Nous supposons que tous les conducteurs (inducteur et pièce métallique à chauffer au moyen des courants induits) sont cylindriques et infinis suivant une certaine direction. Ainsi, nous étudions le problème de chauffage dans un plan perpendiculaire à la direction d'invariance. D'un point de vue mathématique, la modélisation d'un tel processus de chauffage donne lieu à un couplage entre les équations de Maxwell et un problème de diffusion thermique. Nous obtenons un système d'équations aux dérivées partielles pour lequel nous montrons, à l'aide d'une méthode de point fixe, l'existence, voire l'unicité de la solution.

Dans une troisième partie, nous montrons comment notre méthode intégrale peut être utilisée pour résoudre le problème de chauffage par induction que nous avons étudié. A cet effet, nous construisons un schéma numérique couplant notre méthode intégrale avec une méthode d'éléments finis. Les résultats numériques obtenus prouvent l'efficacité de cette approche.

Abstract

The main object of this thesis is the numerical analysis of a regular boundary element method. We consider the interior and exterior bidimensional Dirichlet problems for the Laplacian. To numerically solve this problem, our method consists in inverting (on a finite element space) a regular integral operator which is a “geometrical perturbation” of the Steklov operator. We precisely define the relation between the geometrical perturbation and the dimension of the finite element space, in order to obtain a stable and convergent scheme. Furthermore this numerical scheme does not give rise to any singular integral.

In the second part we are interested in induction processes in which a sinusoidal electromagnetic field is applied. The aim is to determine the temperature field when the inductor current is known. We assume that all the conductors (the inductor and the workpiece to be heated by eddy currents) are cylindrical and infinite in one direction. Thus, the induction heating problem can be studied in a plane perpendicular to the invariance direction. From a mathematical point of view, the modelling of such a heating process involves the coupling of Maxwell’s equations with a thermal diffusion problem. We obtain a system of partial differential equations. The mathematical study allows us to prove the existence and uniqueness of the solution, using a fixed point method.

In the third part, we show how our integral method can be used for solving the induction heating problem we have studied. Therefore, we construct a numerical scheme combining our integral method together with a finite element method. The numerical results obtained prove the efficiency of this approach.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Une méthode sans singularité	3
1.0	Introduction	3
1.1	Présentation de la méthode	5
1.2	Résultats de base.	6
1.3	Analyse sur le cas circulaire.	21
1.3.1	Valeurs propres et vecteurs propres des opérateurs	21
1.3.2	Discrétisation de $H^{-1/2}$ et base échantillonnée	25
1.3.3	Stabilité du schéma numérique.	29
1.3.4	Estimation de l'erreur avec prise en compte de l'intégration numérique.	37
1.4	Généralisation aux domaines avec frontières régulières.	44
1.4.1	Convergence de K_n vers K dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$	45
1.4.2	Schéma numérique	49
1.4.3	Existence et unicité de la solution numérique. Estimation de l'erreur.	50
1.5	Exemples numériques.	55
1.5.1	Construction et résolution du problème discret.	56
1.5.2	Applications	59
1.6	Conclusion	62
2	Chauffage par induction	67
2.0	Introduction	67
2.1	Modélisation	68
2.1.1	Données du problème	69
2.1.2	Modélisation de l'électromagnétisme	70
2.1.3	Modélisation de la thermique	75
2.1.4	Problème complet	76
2.2	Un théorème d'existence et d'unicité	77
2.2.1	Notations et généralités.	77
2.2.2	Nouvelle formulation du problème stationnaire de chauffage par induction.	78
2.2.3	Un résultat d'existence.	81
2.2.4	Un théorème d'unicité	84
3	Application à l'électromagnétisme	91
3.0	Introduction	91
3.1	Une méthode pour la résolution approchée.	92
3.2	Exemple numérique.	95

Chapitre 0

Introduction

Ce document rapporte mon travail de thèse. Travail qui a commencé en avril 96, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne sous la direction du Professeur J. Rappaz. La majeure partie des recherches effectuées dans le cadre de ce travail est présentée dans ce document. L'ordre chronologique des recherches fut le suivant : nous nous sommes dans un premier temps penchés sur un problème bidimensionnel de chauffage par induction, pour lequel un modèle avait déjà été réalisé. Après avoir établi un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de ce problème, nous avons commencé une étude numérique. Un premier survol montrait que nous aurions intérêt à utiliser une méthode intégrale frontière. C'est sur ce point précis que s'est alors concentré notre travail. En effet, au lieu d'utiliser une méthode classique, nous avons pensé qu'il pouvait être intéressant de prendre en considération une méthode "annexe" que nous savions employée par certains ingénieurs. De prime abord, cette méthode semblait offrir des avantages par rapport aux méthodes classiques, et, après une recherche bibliographique approfondie, nous avons remarqué que dans la littérature, il n'y avait que peu d'études sérieuses à son sujet. Notre travail s'est donc efforcé de combler cette lacune, et d'établir solidement l'efficacité de cette méthode, tout en soulignant ses aspects délicats.

Enfin, après cette étude d'intérêt assez général qui a occupé une grande partie du temps imparti pour la thèse, nous sommes un peu revenu aux motivations initiales. A cet effet, nous avons construit un schéma numérique utilisant la méthode intégrale "annexe" afin de résoudre un problème ayant trait au chauffage par induction.

Dans ce document, divisé en trois parties, nous n'avons pas respecté l'ordre chronologique. En effet, la première partie est consacrée à l'étude de la méthode intégrale que nous venons d'évoquer. La deuxième partie concerne le problème de chauffage par induction qui a été à l'origine de la thèse, et la troisième partie traite d'un aspect de la résolution numérique de ce problème.

Bien que ces parties s'inscrivent dans un ensemble dont nous venons d'évoquer la cohérence, elles peuvent aussi être lues séparément. C'est la raison pour laquelle, on trouvera à chaque fois une introduction et une bibliographie spécifiques.

Chapitre 1

Une méthode intégrale sans singularité

1.0 Introduction

L'étude des équations intégrales et de leur résolution numérique est un sujet qui connaît un grand succès depuis une trentaine d'années. La raison provient du fait que de telles équations peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP). En fait, seul un petit nombre de problèmes aux EDP peut être reformulé en équations intégrales, mais ce sont les problèmes les plus importants pour les applications : l'équation de Laplace, de Helmholtz, du biharmonique, ...

La résolution numérique des équations intégrales présente des avantages et des inconvénients par rapport à la résolution "directe" des EDP. Un aspect essentiel est que lorsque la fonction inconnue qui intervient dans l'EDP est recherchée sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$, la reformulation du problème en équation intégrale fait apparaître une fonction inconnue qui est recherchée sur le bord $\partial\Omega$ du domaine.

On réduit ainsi la dimension de l'espace de la fonction. De plus lorsque Ω est le complémentaire d'un domaine borné O , on transforme un problème posé sur un domaine non borné en un problème posé sur un domaine borné (qui est ∂O).

Cependant il existe des désavantages non négligeables : les méthodes de résolution des équations intégrales sont en général plus délicates à programmer car elles nécessitent l'évaluation d'intégrales où l'intégrand est singulier. D'autre part, bien qu'après discrétisation on soit conduit à résoudre un système linéaire de dimension inférieure à celui que l'on a pour le problème d'EDP, le gain en temps ou en mémoire requise n'est pas assuré car on a affaire à des systèmes pleins.

En résumé, l'approche d'un problème d'EDP en utilisant des équations intégrales frontalières est avantageux dans certains cas (par exemple pour les problèmes extérieurs), mais pas toujours. Très souvent pour résoudre de manière optimale un système d'EDP, on est conduit à coupler des méthodes intégrales frontalières avec des méthodes d'éléments finis.

Cela étant dit, un autre problème intéressant consiste à déterminer la méthode intégrale la plus avantageuse possible. L'idéal serait de minimiser les désavantages que nous avons cités tout en ayant une convergence rapide de la solution approchée vers la solution exacte. Cette question a motivé de nombreuses études et il existe maintenant un très grand nombre de méthodes intégrales devenues "classiques".

Ces méthodes intégrales se basent souvent sur des équations intégrales singulières que l'on discrétise par des méthodes de Galerkin, de collocation, spectrales, ... Pour une revue de ces méthodes "classiques" on pourra consulter l'article [27], et pour une étude plus approfondie

il existe plusieurs livres de référence : [18],[1],[24] et [8].

En marge de ces méthodes qui ont fait leurs preuves, il en existe d'autres, un peu délaissées des mathématiciens mais qui ont des adeptes parmi les ingénieurs. C'est la cas notamment des méthodes connues sous le nom de RBEM (regular boundary element methods). Leur intérêt est qu'elles se basent sur des formulations intégrales qui ne font pas apparaître d'intégrand singulier et on peut donc s'attendre à ce qu'elles soient plus faciles à programmer. C'est en partie vrai, mais on s'est rendu compte en pratique que les méthodes de ce type qui sont stables font inévitablement apparaître des intégrands qui tendent à devenir singuliers lorsque la taille du problème discret augmente. Ainsi le gain pratique peut exister mais il reste limité et si l'on veut faire un calcul approché précis, il faut évaluer certaines intégrales avec précaution.

Quelques articles traitent de l'application pratique de ces méthodes, on pourra consulter par exemple [28] ou [31].

Citons aussi le succès que semble actuellement remporter chez les ingénieurs la méthode MFS (method of fundamental solution, aussi appelée method of charge simulation). On pourra consulter des articles très récents : [7] pages 103 à 176, ou [14]. Cette méthode est assez similaire à la nôtre et nous avons récemment constaté qu'elle a été analysée mathématiquement : c.f [11], [12], [13], [15] et [16]. On constatera cependant d'une part que l'article théorique le plus général ([13]) est très compliqué malgré une portée assez limitée (ce qui semble être inhérent à la méthode) et d'autre part que la méthode comporte de nombreux problèmes qui ne sont que superficiellement résolus.

Nous reviendrons un peu sur cela dans la suite.

Le but de cet article est de faire une analyse rigoureuse d'une de ces méthodes intégrales régulières appliquée à la résolution d'un problème de laplacien (intérieur ou extérieur) en dimension deux. Nous voulons montrer que pour obtenir la stabilité de la méthode, il faut réaliser un compromis avec la régularité et que ceci étant fait, on obtient une méthode efficace.

Le plan d'étude est le suivant :

- Dans la première section on présente brièvement la méthode appliquée à un problème de Laplace.

- Dans la deuxième section on introduit les notions et résultats mathématiques de base qui nous seront utiles pour l'analyse de la méthode.

On rappellera des résultats concernant les problèmes de Laplace en dimension deux et les potentiels de simple et de double couche. Nous présenterons aussi diverses formulations intégrales qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème du laplacien. Après une rapide discussion sur l'intérêt de ces formulations nous en conserverons deux : une "classique" et une "régulière" sur laquelle est basée notre méthode.

- Dans la troisième partie nous présentons une analyse complète de notre méthode dans le cas où le domaine Ω sur lequel est posé le problème de Laplace est un disque.

Nous montrons comment rendre la méthode stable et que ceci étant fait, elle est convergente et son ordre de convergence est le même que celui de la méthode "classique" prise pour référence.

Nous abordons ensuite la question de l'intégration numérique et nous donnons un schéma d'intégration qui assure une convergence optimale.

- Dans la quatrième partie, nous généralisons les résultats de stabilité et de convergence au cas où le domaine Ω est régulier mais de forme quelconque.

- Dans la cinquième partie nous présentons quelques exemples numériques. On considère des problèmes de laplacien intérieur et extérieur avec divers domaines Ω et diverses valeurs

imposées sur le bord $\partial\Omega$.

1.1 Présentation de la méthode

Nous présentons ici notre méthode pour résoudre un problème de Dirichlet intérieur en dimension deux.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné, dont la frontière Γ est régulière (nous préciserons dans quel sens plus loin). Etant donnée une fonction u_0 définie sur Γ , on cherche à déterminer une fonction u définie sur Ω et vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

Notre méthode repose sur une formulation intégrale de (1.1), qui est quelquefois appelée “Kupradze functional equation” en référence au russe V.D. Kupradze qui l’a introduite (c.f [20]).

Pour cela on considère une courbe fermée régulière $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ qui entoure Γ , et on cherche q définie sur Γ et telle que

$$\int_{\Gamma} q(y)K(x, y)ds_y = \int_{\Gamma} u_0(y)K_{n_y}(x, y)ds_y, \quad x \in \tilde{\Gamma}, \quad (1.2)$$

où on a posé $K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \|x - y\|$ et $K_{n_y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial n_y} K(x, y)$.

Nous montrerons que cette équation intégrale admet toujours une unique solution (dans un certain espace fonctionnel). On obtient ensuite la solution du problème (1.1) par :

$$u(x) = \int_{\Gamma} q(y)K(x, y)ds_y - \int_{\Gamma} u_0(y)K_{n_y}(x, y)ds_y, \quad x \in \Omega.$$

Ainsi pour résoudre le problème (1.1) nous nous intéressons à la résolution de l’équation intégrale (1.2).

C’est une équation régulière car le noyau $K(x, y)$ est régulier (et même $\mathcal{C}^\infty$) lorsque les variables x et y sont prises dans deux domaines disjoints (qui sont ici $\tilde{\Gamma}$ et Γ).

L’idée la plus simple pour résoudre l’équation (1.2) consiste à découper la courbe Γ en n arcs, puis à chercher une fonction q_n constante sur chacun de ces arcs et qui vérifie la relation (1.2) en n points distincts choisis sur $\tilde{\Gamma}$.

Nous montrerons qu’une telle approche ne donne pas de bons résultats, sauf si la courbe auxiliaire (qui est un paramètre libre) est rapprochée de Γ lorsque n augmente.

Plus précisément, il faut choisir une famille $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de courbes auxiliaires telle que $\text{dist}(\Gamma, \tilde{\Gamma}_n) = O(1/n)$, lorsque n tend vers l’infini (c.f Fig 1.1).

Nous supposons que Γ admet une paramétrisation régulière,

i.e $\Gamma = \{x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}$, avec $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ et $x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on découpe uniformément l’intervalle $[0, 1]$ en n sous-intervalles $[\theta_i, \theta_{i+1}]$,

$\theta_i = i.h, i = 0, \dots, n-1$ de longueur $h = 1/n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre positif à choisir, nous définissons la famille $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de courbes auxiliaires par

$$\tilde{\Gamma}_n = \left\{ x_n(t) \in \mathbb{R}^2 : x_n(t) = x(t) + \frac{\lambda}{n} \zeta(t), t \in [0, 1] \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

où $\zeta(t)$ est la normale unité sur Γ extérieure à Ω en $x(t)$.

On considère ensuite les espaces V_n, W_n et les points z_i définis par

$$\begin{aligned} V_n &= \left\{ \varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \varphi|_{x([\theta_i, \theta_{i+1}])} \in \mathbb{P}_0 \quad \forall i \in 0..n, \int_{\Gamma} \varphi(x) dx = 0 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ W_n &= \left\{ \varphi : \tilde{\Gamma}_n \rightarrow \mathbb{R}, \varphi|_{x_n([\theta_i, \theta_{i+1}])} \in \mathbb{P}_0 \quad \forall i \in 0..n, \int_{\tilde{\Gamma}_n} \varphi(x) dx = 0 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ z_i &= x_n \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right), \quad i \in 1..n. \end{aligned}$$

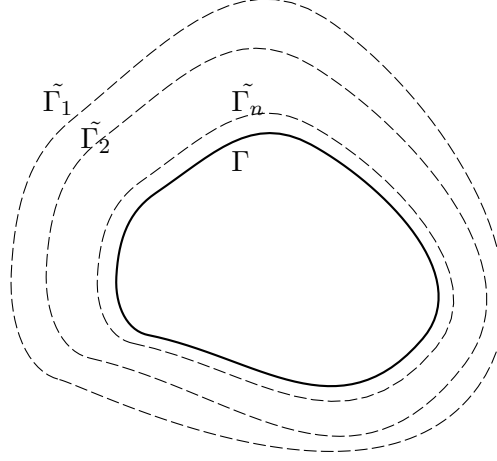


FIG. 1.1 – Courbes auxilliaires.

Nous déterminons une suite d'approximations $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_n$ de la fonction q solution de l'équation (1.2) par un des deux schémas suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } q_n \in V_n \text{ tq} \\ \int_{\tilde{\Gamma}_n} \left(\int_{\Gamma} K(x, y) q_n(y) q'_n(x) ds_y \right) ds_x = \int_{\tilde{\Gamma}_n} \left(\int_{\Gamma} K_{n_y}(x, y) u_0(y) q'_n(x) ds_y \right) ds_x, \quad (1.4) \\ \forall q'_n \in W_n. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } q_n \in V_n \text{ tq} \\ \int_{\Gamma} K(z_i, y) q_n(y) ds_y = \int_{\Gamma} K_{n_y}(z_i, y) u_0(y) ds_y, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, si on choisit une base des espaces V_n et W_n alors ces deux schémas reviennent à construire, puis à résoudre un système linéaire pour déterminer q_n .

Le schéma (1.5) qui utilise la collocation, a l'avantage de ne faire apparaître que des intégrales simples et est donc plus facile à implanter sur ordinateur. Cependant nous étudierons le schéma (1.4) dont l'analyse est un peu plus aisée. Remarquons cependant que le schéma (1.5) peut-être vu comme (1.4) avec une intégration numérique.

1.2 Résultats de base.

Dans cette partie nous introduisons des notions et résultats mathématiques de base concernant les potentiels newtoniens de simple et de double couche et les formulations intégrales du problème de Dirichlet pour le laplacien en dimension deux.

Nous désignerons par Ω , un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, simplement connexe et dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est régulière. On supposera que l'origine est contenue dans Ω et on utilisera aussi la notation $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$.

On s'intéresse aux problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur pour le laplacien, ils s'énoncent de la manière suivante :

• **Problème de Dirichlet intérieur**

Pour f donnée sur Γ , on cherche u dans Ω telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = f & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.6)$$

• **Problème de Dirichlet extérieur**

Pour f donnée sur Γ , on cherche u dans Ω' telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega', \\ u = f & \text{sur } \Gamma, \\ u(x) = O(1) & \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.7)$$

Nous introduisons maintenant des espaces fonctionnels dans lesquels on cherchera les solutions de ces problèmes.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev muni de sa norme $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ et de sa semi-norme $|\cdot|_{s,\Omega}$.

Soit $\eta(x)$ le poids donné par $\eta(x) = (1 + \|x\|)^{-1} (1 + \log(2 + \|x\|))^{-1}$. On note $W_0^1(\mathbb{R}^2)$ l'espace de Sobolev à poids défini par

$$W_0^1(\mathbb{R}^2) = \{\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \eta\psi \in L^2(\mathbb{R}^2), \nabla\psi \in (L^2(\mathbb{R}^2))^2\},$$

et équipé de la norme $\|\psi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)} = \left(\|\eta\psi\|_{0,\mathbb{R}^2}^2 + \|\nabla\psi\|_{0,\mathbb{R}^2}^2 \right)^{1/2}$, qui en fait un espace de Banach.

On montre (c.f [23]) que la semi-norme $|\cdot|_{1,\mathbb{R}^2}$ est une norme sur $W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}$, qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}$.

Pour $s \in \mathbb{R}$ on note $H^s(\Gamma)$, l'espace de Sobolev muni de sa norme $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$.

Précisons quelque peu la notion d'**espace de Sobolev de fonctions définies sur une courbe** :

Soit $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, on définit l'espace de Sobolev H^s , comme la fermeture de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et 1-périodiques, par rapport à la norme $\|\varphi\|_s = (\varphi, \varphi)_s^{1/2}$, où

$$(\varphi, \psi)_s = \hat{\varphi}_0 \bar{\hat{\psi}}_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{\varphi}_k \bar{\hat{\psi}}_k |2\pi k|^{2s}, \quad (1.8)$$

avec $\hat{\varphi}_k = \int_0^1 \varphi(t) e^{-2i\pi kt} dt$.

Nous utiliserons la notation $v_k(t) = e^{2i\pi kt}$. Remarquons que la relation (1.8) implique que le système $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H^s . On remarque aussi que l'espace H^s peut être interprété comme étant l'ensemble des fonctions 1-périodiques φ dont la suite de Fourier $\mathcal{S}_n \varphi$ converge vers φ en norme H^s . En particulier, si $s \in \mathbb{N}$, toutes les fonctions 1-périodiques de classe $\mathcal{C}^s$ sont dans H^s .

On définit ensuite H^{-s} comme l'espace dual de H^s , et on montre que si $F \in H^{-s}$ alors

$$\|F\|_{-s}^2 = |c_0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |2k\pi|^{-2s} |c_k|^2,$$

où $c_k = F(v_{-k})$.

On choisira $L^2 = H^0$ comme espace pivot, ce qui revient à dire que L^2 est identifié à son dual. Ainsi, L^2 sera considéré comme un sous-espace de H^{-s} . En effet, si $g \in L^2$ on lui associe la forme linéaire $G \in H^{-s}$ définie par $G(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t) \bar{g}(t) dt$, $\forall \varphi \in H^s$.

On montre alors (cf [18] th. 8.10) que le système $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est dense dans H^{-s} . De plus, pour $u \in H^{-s}$, on pose $u_k = \int_0^1 u(x) v_{-k}(x) dx$ (au sens de la dualité), et on montre que le produit (1.8) est aussi un produit scalaire sur H^{-s} . On vérifie aussi que la suite

$w_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} u_k v_k(x)$ converge vers u au sens de la norme $\|\cdot\|_{-s}$.

Une propriété importante du produit scalaire (1.8) est qu'il peut être étendu en un produit de dualité entre $H^{s-\alpha}$ et $H^{s+\alpha}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Plus précisément, on définit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s-\alpha, s+\alpha}$ (cf [18] pages 108-115 ou [27] pages 298-299) par

$$\langle u, v \rangle_{s-\alpha, s+\alpha} = (u, v)_s \quad \forall u \in H^{s-\alpha}, \forall v \in H^{s+\alpha}, \quad (1.9)$$

et on montre que

$$|\langle u, v \rangle_{s-\alpha, s+\alpha}| \leq \|u\|_{s-\alpha} \|v\|_{s+\alpha} \quad \forall u \in H^{s-\alpha}, \forall v \in H^{s+\alpha}, \quad (1.10)$$

$$\|v\|_{s-\alpha} = \sup_{w \in H^{s+\alpha}} \frac{\langle v, w \rangle_{s-\alpha, s+\alpha}}{\|w\|_{s+\alpha}} \quad \forall v \in H^{s-\alpha}. \quad (1.11)$$

Nous allons maintenant montrer que si Γ est assez régulière alors on peut définir $H^s(\Gamma)$ par homéomorphie avec H^s .

On suppose que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$, on appellera alors paramétrisation régulière de Γ toute bijection $x \in \mathcal{C}^k([0, 1], \Gamma)$ telle que

$$x^{(r)}(0) = x^{(r)}(1), \quad \forall r \in [0..k], \quad \text{et } \|x'(t)\| \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.12)$$

Il est bien clair que pour toute courbe Γ de classe $\mathcal{C}^k$ donnée, il existe une infinité de paramétrisations régulières.

Dans la suite de notre travail, pour simplifier les énoncés nous considererons toujours des courbes de classe $\mathcal{C}^\infty$. Tout resterait cependant valable sous des hypothèses moins fortes, i.e Γ de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}$ à préciser à chaque fois.

Soit $s > 0$, nous définissons $H^s(\Gamma)$ par

$$H^s(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \circ x \in H^s\}, \quad (1.13)$$

et nous le munissons de la norme donnée par $\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} = \|\varphi \circ x\|_s$. Cette norme dépend de la paramétrisation x , mais si $\tilde{x}$ est une autre paramétrisation convenable, on obtient une norme équivalente (cf [18] pages 118 et 119).

Soit $H^s(\Gamma)^*$ le dual de $H^s(\Gamma)$, $F \in H^s(\Gamma)^*$ signifie que l'application

$v \in H^s(\Gamma) \rightarrow \langle F, v \rangle \in \mathbb{R}$ est linéaire et continue. Pour $s = 0$ on a $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$ et on identifie $L^2(\Gamma)$ à son dual avec le produit scalaire naturel $\int_\Gamma u v dx$. Ceci nous permet d'introduire la notation $H^{-s}(\Gamma) = H^s(\Gamma)^*$, et d'affirmer que

$H^s(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-s}(\Gamma)$, avec dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-s}(\Gamma), H^s(\Gamma)}$.

Soit $s = 0$, $F \in H^{-s}(\Gamma)$, remarquons que pour $v \in L^2(\Gamma)$ nous avons :

$$\langle F, v \rangle_{H^{-0}(\Gamma), H^0(\Gamma)} = \int_\Gamma F(x) v(x) ds_x = \int_0^1 F(x(t)) v(x(t)) \|x'(t)\| dt.$$

Ainsi, si on pose $\hat{F} = F \circ x$ et $\hat{v} = v \circ x$, on n'obtient pas

$\langle F, v \rangle_{H^{-s}(\Gamma), H^s(\Gamma)} = \langle \hat{F}, \hat{v} \rangle_{0,0}$. Cependant on montre le résultat suivant : $F \in H^{-s}(\Gamma)$ si

et seulement si $\alpha \equiv |c_0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |2\pi k|^{-2s} |c_k|^2 < \infty$, où $c_k = \langle F, e^{-2i\pi k x^{-1}(\cdot)} \rangle_{H^{-s}(\Gamma), H^s(\Gamma)}$. Ceci signifie que α donne une norme équivalente sur $H^{-s}(\Gamma)$. Si $s = 0$ alors

$$c_k = \int_{\Gamma} F(z) e^{-2i\pi k x^{-1}(z)} ds_z = \int_0^1 \hat{F}(t) v_{-k}(t) \|x'(t)\| dt,$$

et on voit clairement que c_k n'est pas le coefficient de Fourier de $\hat{F}$. Néanmoins on a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \sim \|\hat{F}\|_0^2$.

Nous refermons cette parenthèse.

Pour alléger l'écriture, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{H}^s &= \{f \in H^s, \langle 1, f \rangle_{-s, s} = 0\}, \\ \tilde{H}^s(\Gamma) &= \{f \in H^s(\Gamma), \langle 1, f \rangle_{H^{-s}(\Gamma), H^s(\Gamma)} = 0\}. \end{aligned}$$

Concernant l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (1.6) et (1.7) on a le résultat suivant :

Lemme 1.1 *Soit $f \in H^s(\Gamma)$, avec $s \in \mathbb{R}$, alors le problème (1.6) admet une unique solution $u \in H^{s+1/2}(\Omega)$. Si $s \geq -\frac{1}{2}$, alors le problème (1.7) admet une unique solution $u \in H_{loc}^{s+1/2}(\Omega')$.*

Nous ne donnerons pas de démonstration de ce résultat qui est bien connu (cf [3] pages 253-254). Remarquons que pour le problème (1.7), c'est le comportement à l'infini qui assure l'unicité.

La définition suivante précise les notions de **trace intérieure et extérieure** et de **saut** d'une fonction sur une courbe.

Définition 1.1 *Soit $u \in C^\infty(O \cup O')$, une fonction régulière définie dans un voisinage intérieur O et un voisinage extérieur O' de la courbe Γ .*

On note $u|_\Gamma^i, u|_\Gamma^e, [u]_\Gamma$ (ou plus simplement $u^i, u^e, [u]$, s'il n'y a pas d'ambiguïté), les fonctions appelées trace intérieure, trace extérieure et saut de u sur Γ .

Elles sont définies par :

$$\begin{aligned} u^i(z) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} u(z + h.n(z)), \quad z \in \Gamma, \\ u^e(z) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} u(z + h.n(z)), \quad z \in \Gamma, \\ [u]_\Gamma(z) &= u^i(z) - u^e(z), \quad z \in \Gamma, \end{aligned}$$

où $n(z)$ désigne la normale extérieure à Ω , en $z \in \Gamma$, et les limites sont entendues dans le sens ponctuel.

Toutes les équations intégrales pour les problèmes du laplacien sont construites grâce à l'existence d'une **solution élémentaire du laplacien** :

Définition 1.2 *La fonction $K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \|x - y\|,$$

est appelée solution élémentaire du laplacien en dimension deux.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, on a $-\Delta_x K(x, y) = \delta_y$, où δ_y est la masse de Dirac en y .

Avec la solution élémentaire du laplacien, on définit les **potentiels de simple et de double couche** :

Définition 1.3 Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, on introduit les fonctions $V_1(f), V_2(f) : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, définies par :

$$V_1(f)(x) = \int_{\Gamma} f(y)K(x, y)ds_y, \quad (1.14)$$

$$V_2(f)(x) = \int_{\Gamma} f(y)K_{n_y}(x, y)ds_y. \quad (1.15)$$

$V_1(f)$ est appelée potentiel de simple couche avec une densité répartie sur Γ (ou plus simplement potentiel de simple couche) et $V_2(f)$ est appelée potentiel de double couche.

Remarque 1.1 Quelquefois les potentiels sont définis avec le signe contraire, i.e ce n'est pas K et K_{n_y} qui interviennent sous le signe intégral, mais $-K$ et $-K_{n_y}$.

Lorsque la densité f est régulière (c.f définition 1.3), on montre avec des arguments simples les propriétés ci-dessous :

Lemme 1.2 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, alors $V_1(f), V_2(f) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cup \Omega')$. A travers Γ , les relations de sauts sont les suivantes

$$[V_1(f)]_{\Gamma} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} V_1(f) \right]_{\Gamma} = f, \quad (1.16)$$

$$[V_2(f)]_{\Gamma} = -f, \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} V_2(f) \right]_{\Gamma} = 0. \quad (1.17)$$

De plus $V_1(f)$ et $V_2(f)$ sont harmoniques dans $\Omega \cup \Omega'$ et leur comportement asymptotique à l'infini est donné par

$$V_1(f)(x) = -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| \int_{\Gamma} q(y)ds_y + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

$$V_2(f)(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Les potentiels de simple et de double couche peuvent être définis par densité (et de manière unique) pour des fonctions $f \in H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$, et nous conserverons l'écriture $V_1(f)$ et $V_2(f)$. La plupart des propriétés énoncées dans le lemme 1.2 restent vraies, dans un sens que nous allons préciser.

Dans le livre [3] aux pages 223 à 252 , on trouvera montré les résultats suivants :

Lemme 1.3 Si $f \in H^s(\Gamma)$ alors $V_1^i(f) \in H^{s+1}(\Gamma)$, $V_1^e(f) \in H^{s+1}(\Gamma)$, et les relations énoncées en (1.16) restent vraies.

De même on a $V_2^i(f) \in H^s(\Gamma)$, $V_2^e(f) \in H^s(\Gamma)$, et les relations énoncées en (1.17) restent vraies.

Les propriétés d'harmonicité de $V_1(f)$ et de $V_2(f)$, s'interprètent de manière variationnelle lorsque f est peu régulière. Par exemple (cf [22]) on a

Lemme 1.4

Pour tout $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$, il existe une unique fonction $u \in W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}$, solution du problème variationnel :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla v dx = \langle q, v|_{\Gamma} \rangle \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^2), \quad (1.20)$$

et on a $\|u\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$.

De plus si $q \in C^\infty(\Gamma) \cap \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ on vérifie que

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q(y) \log \|x - y\| ds_y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nous avons ainsi défini $V_1(q)$ à une constante près, pour des densités $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

On suppose maintenant que Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts bornés, simplement connexes, de frontières Γ_1 et Γ_2 de classes C^∞ et que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ (cf figure 1.2).

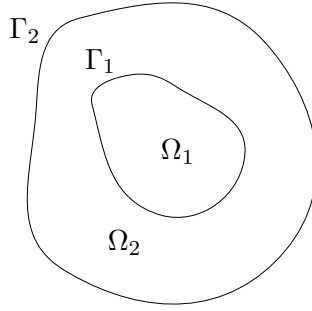


FIG. 1.2 – Courbes Γ_1 et Γ_2 .

On introduit les notations suivantes :

Définition 1.4 Soit $q \in L^2(\Gamma_1)$, avec $s \in \mathbb{R}$, on définit $S_{\Gamma_1, \Gamma_2}(q), Q_{\Gamma_1, \Gamma_2}(q) : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$S_{\Gamma_1, \Gamma_2}(q)(x) = \int_{\Gamma_1} q(y) K(x, y) ds_y, \quad x \in \Gamma_2, \quad (1.21)$$

$$Q_{\Gamma_1, \Gamma_2}(q)(x) = \int_{\Gamma_1} q(y) K_{n_y}(x, y) ds_y, \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.22)$$

On définit aussi S_{Γ_2, Γ_1} et Q_{Γ_2, Γ_1} en échangeant Γ_1 et Γ_2 . Si les courbes Γ_1 et Γ_2 sont disjointes, alors on vérifie que les noyaux $K(., .)$ et $K_{n_y}(., .)$ sont dans $H^s(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi, en utilisant la relation (1.10) on constate que les définitions (1.21) et (1.22) ont un sens pour tout $q \in H^s(\Gamma_1)$, quelquesoit $s \in \mathbb{R}$.

De plus on a $S_{\Gamma_1, \Gamma_2}, Q_{\Gamma_1, \Gamma_2} \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma_1), H^t(\Gamma_2))$, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Dans le cas particulier où $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, le lemme 1.4 permet d'interpréter $S_{\Gamma_1, \Gamma_2}(q)$ comme étant (à une constante près) la trace de u sur Γ_2 , où $u \in W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}$ est la solution de (1.20).

On remarquera aussi que cette dernière interprétation a un sens même dans le cas limite $\Gamma_1 = \Gamma_2$, bien que dans ce cas la définition (1.21) n'a plus de sens en dualité.

A partir de maintenant nous adopterons la convention suivante : lorsque l'on indice un opérateur par deux courbes dont les symboles sont différents (ex: S_{Γ_1, Γ_2}), cela signifie implicitement que les courbes sont distinctes (et en plus qu'elles sont toutes deux régulières,

fermées et que l'une est à "l'intérieur de l'autre"). Dans le cas où les courbes sont identiques, on indicera l'opérateur avec deux symboles identiques (ex : $S_{\Gamma,\Gamma}$). Ces opérateurs nous serviront dans la suite pour l'écriture de certaines équations intégrales. Commençons par énoncer certaines de leurs propriétés.

Si X et Y sont des espaces de Banach, on note $\mathcal{K}(X, Y)$, le sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$ qui est constitué des applications linéaires compactes de X dans Y .

Lemme 1.5 *Soit $s, t \in \mathbb{R}$, on a*

$$S_{\Gamma_1, \Gamma_2}, Q_{\Gamma_1, \Gamma_2} \in \mathcal{K}(H^s(\Gamma_1), H^t(\Gamma_2)).$$

De plus $S_{\Gamma_1, \Gamma_2} : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_2)$ est injectif.

Preuve.

- Nous avons déjà fait remarquer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a

$$S_{\Gamma_1, \Gamma_2}, Q_{\Gamma_1, \Gamma_2} \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma_1), H^t(\Gamma_2)).$$

Ainsi, comme l'injection $H^s(\Gamma_2) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma_2)$ est compacte, on a montré la première propriété.

- Soit $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. D'après le lemme 1.4 on a $S_{\Gamma_1, \Gamma_2}(q) = c + u|_{\Gamma_2}$, où $c \in \mathbb{R}$ et $u \in W_0^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla v dx = \langle q, v|_{\Gamma} \rangle \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^2). \quad (1.23)$$

Ainsi, si on suppose que $u|_{\Gamma_2} = -c$, alors $u|_{\Omega_2'} = -c$ et avec le principe des zéros isolés on déduit que $u|_{\Omega_1'} = -c$.

Ceci implique que $u|_{\Gamma_1} = -c$, car u est continue à travers Γ_1 . Mais comme u est harmonique dans Ω_1 , on a aussi $u|_{\Omega_1} = -c$.

Finalement $q = \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma_1} = 0$, ce qui prouve l'injectivité. ■

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, dans le cas limite où $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, si $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ la relation (1.14) n'a plus de sens en dualité. Cependant on conserve quelquefois cette écriture.

L'opérateur $S_{\Gamma, \Gamma}$ est communément appelé **opérateur de Steklov-Poincaré**. Nous allons brièvement rappeler son intérêt pour la résolution de (1.6) ou (1.7) par **équation intégrale de première espèce**. Rappelons tout d'abord qu'une équation intégrale de première espèce, est une équation qui fait intervenir une inconnue qui n'apparaît que sous l'intégrale. Schématiquement elle s'écrit $Au = f$, où u est l'inconnue, A est un opérateur intégral et f est le second membre (qui est connu).

Parmis les premiers articles fondamentaux à ce sujet on a [22] et [29]. Par exemple en utilisant [22], on a le résultat suivant

Lemme 1.6 *L'opérateur $S_{\Gamma, \Gamma} : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}$, est un isomorphisme et il vérifie la propriété de coercivité (aussi appelé ellipticité forte) qui s'écrit*

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{tq} \quad \langle q, S_{\Gamma, \Gamma}(q) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \geq \gamma \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2, \quad \forall q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Ceci implique que pour tout $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe un unique couple $(q, \beta) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ tel que

$$S_{\Gamma, \Gamma}(q) + \beta = u_0. \quad (1.24)$$

De plus la solution des problèmes (1.6) et (resp. 1.7) avec $f = u_0$ est donnée par $u(x) = V_1(q)(x) + \beta$, $x \in \Omega$ ($x \in \Omega'$ resp.).

Remarque 1.2 La solution $(q, \beta) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ de l'équation (1.24) est déterminée en deux étapes :

$q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ est l'unique solution de

$$\langle S_{\Gamma, \Gamma}(q), q' \rangle_{H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)} = \langle u_0, q' \rangle_{H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall q' \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.25)$$

et $\beta \in \mathbb{R}$ est ensuite donnée par

$$\langle \beta, 1 \rangle = \langle u_0 - S_{\Gamma, \Gamma}(q), 1 \rangle. \quad (1.26)$$

Ce résultat est important, en effet il donne une formulation intégrale permettant de résoudre le problème (1.6) ou (1.7). Mais surtout il montre que l'équation intégrale à résoudre est un problème bien posé. Sa formulation variationnelle fait apparaître la forme bilinéaire

$$a_{\Gamma, \Gamma}(q, q') = \langle S_{\Gamma, \Gamma}(q), q' \rangle_{H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)}, \quad (1.27)$$

qui est coercive sur $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

En conséquence, on peut résoudre de manière approchée l'équation (1.25) en utilisant la méthode de Galerkin. Si on choisit une suite convenable d'espaces discrets alors le schéma obtenu sera stable et convergent.

Actuellement le résultat présenté dans le lemme 1.6 peut-être inclus dans une théorie très générale qui concerne les opérateurs pseudo-différentiels. Pour plus de détail, on pourra consulter les livres [3] et [24] qui traitent de la résolution numérique des équations intégrales sous l'angle de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels.

Remarque 1.3 Dans le cas où $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, l'opérateur S_{Γ_1, Γ_2} (où S_{Γ_2, Γ_1}) n'est pas un isomorphisme.

Cela s'interprète de la manière suivante : si q appartient à l'espace $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, le potentiel de simple couche u de densité q répartie sur Γ_1 est harmonique dans le complémentaire de $\bar{\Omega}_1$ ($= \Omega'_1$) en entier. Ainsi pour $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ donnée, l'équation intégrale

$$\int_{\Gamma_1} q(y) K(x, y) ds_y = u_0(x), \quad \forall x \in \Gamma_2,$$

ne peut avoir de solution que dans le cas où u_0 est la trace sur Γ_2 d'une fonction harmonique dans un voisinage de Γ_2 .

• Formulations intégrales

Dans le lemme 1.6 nous avons montré une première formulation intégrale permettant de résoudre les problèmes (1.6) et (1.7).

Nous allons maintenant utiliser la formule de Green pour en construire d'autres. L'outil de base pour cela est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 1.1 Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, telle que $u|_{\bar{\Omega}} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et $u|_{\bar{\Omega}'} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}')$. On suppose de plus que u vérifie

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ u(x) &= \beta + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & \text{quand } \|x\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Alors, si $x \in \Omega \cup \Omega'$,

$$u(x) = \beta + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} (y) K(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} [u]_{\Gamma}(y) K_{n_y}(x, y) ds_y,$$

et si $x \in \Gamma$,

$$\frac{1}{2}(u|_{\Gamma}^i + u|_{\Gamma}^e) = \beta + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} (y) K(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} [u]_{\Gamma}(y) K_{n_y}(x, y) ds_y.$$

Preuve. c.f [23] page 4 ou [1] page 318. ■

Remarque 1.4 Dans l'article [6], on trouvera une généralisation du théorème 1.1 dans le cas où Ω est un domaine lipschitzien, le laplacien est remplacé par une classe plus vaste d'opérateurs différentiels et u est moins régulière.

A partir du théorème 1.1, on construit des **formulations mixtes** qui sont basées sur les potentiels de simple et de double couche.

Par exemple, considérons le problème (1.6). Si la donnée aux limites

$f = u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, nous savons que le problème admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

Si nous prolongeons cette fonction par 0 sur Ω' alors u vérifie les hypothèses du théorème 1.1 (sauf pour la régularité mais cela ne pose pas de problème : cf remarque 1.4).

On rappelle que $\tilde{\Gamma}$ désigne une courbe fermée et régulière du plan, qui délimite un domaine $\tilde{\Omega} \supset \Omega$. On déduit alors du théorème 1.1 le lemme suivant :

Lemme 1.7 Soit $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ donné, on considère les équations suivantes :

$$\text{chercher } q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \text{ tq } S_{\Gamma, \Gamma}(q) = Q_{\Gamma, \Gamma}(u_0) + \frac{u_0}{2}, \quad (1.28)$$

$$\text{chercher } q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \text{ tq } S_{\Gamma, \tilde{\Gamma}}(q) = Q_{\Gamma, \tilde{\Gamma}}(u_0). \quad (1.29)$$

L'équation (1.28) admet une unique solution $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$. De plus la solution du problème (1.6) avec $f = u_0$ est donnée par

$$u(x) = \int_{\Gamma} q(y) K(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} u_0(y) K_{n_y}(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega.$$

L'équation (1.29) admet aussi une unique solution $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\tilde{\Gamma})$, qui est la même que celle de l'équation (1.28).

Preuve.

Soit u , l'unique solution de

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ u &= u_0, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

et $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega'. \end{cases}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0 \quad \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ [v]_\Gamma &= u_0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}, \\ v(x) &= O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{quand } \|x\| \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Pour simplifier la démonstration nous supposons que v est assez régulière pour nous permettre d'utiliser le théorème 1.1 (autrement il faudrait utiliser une généralisation du théorème (cf remarque 1.4)).

On a

$$\frac{1}{2}u_0(x) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(y)K(x,y)ds_y - \int_\Gamma u_0(y)K_{n_y}(x,y)ds_y, \quad x \in \Gamma, \quad (1.30)$$

$$0 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(y)K(x,y)ds_y - \int_\Gamma u_0(y)K_{n_y}(x,y)ds_y, \quad x \in \Omega', \quad (1.31)$$

$$u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(y)K(x,y)ds_y - \int_\Gamma u_0(y)K_{n_y}(x,y)ds_y, \quad x \in \Omega. \quad (1.32)$$

Les relations (1.30) à (1.32) nous montrent d'une part que la fonction $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ est solution des équations (1.28) et (1.29), et d'autre part que

$$u(x) = \int_\Gamma q(y)K(x,y)ds_y - \int_\Gamma u_0(y)K_{n_y}(x,y)ds_y, \quad x \in \Omega,$$

est la solution du problème (1.6).

On déduit ensuite des lemmes 1.6 et 1.5 que $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ est nécessairement l'unique solution de (1.28) et de (1.29).

■

Remarque 1.5

• Le problème (1.7) peut-être reformulé de la même manière, mis à part quelques modifications : on utilise dans ce cas une courbe auxiliaire $\tilde{\Gamma} \subset \Omega$, d'autre part il y a un changement de signe et une constante β qui apparaît.

Les équations (1.28) et (1.29) deviennent :

$$\text{chercher } q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \text{ tq } -S_{\Gamma,\Gamma}(q) + \beta = -Q_{\Gamma,\Gamma}(u_0) + \frac{u_0}{2}, \quad (1.33)$$

$$\text{chercher } q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \text{ tq } -S_{\Gamma,\tilde{\Gamma}}(q) + \beta = -Q_{\Gamma,\tilde{\Gamma}}(u_0). \quad (1.34)$$

Les équations (1.33) et (1.34) admettent la même solution $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$. La solution du problème (1.7) avec $f = u_0$ est donnée par

$$u(x) = \beta - \int_\Gamma q(y)K(x,y)ds_y + \int_\Gamma u_0(y)K_{n_y}(x,y)ds_y, \quad x \in \Omega'.$$

• Il est important de noter que l'unique solution $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ de l'équation (1.29) (ou de (1.34)) est indépendante de la courbe auxiliaire choisie.

Par exemple pour l'équation (1.29), la solution est donnée par $q = \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma$, où $u \in H^1(\Omega)$ est la solution de (1.6).

- Pour résoudre (1.6), on peut aussi s'intéresser à l'équation

$$\text{chercher } q \in H^s(\Gamma) \text{ tq } S_{\tilde{\Gamma},\Gamma}(q) = u_0, \quad (1.35)$$

car il est clair que si q est une solution de (1.35) alors

$$u(x) = \int_{\tilde{\Gamma}} q(y) K(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega,$$

est la solution de (1.6). Le problème ici est que, comme nous l'avons déjà fait remarquer (cf remarque 1.3), l'équation (1.35) n'a pas de solution en général. En fait on peut montrer qu'une condition nécessaire pour avoir une solution est que Γ et u_0 soient analytiques (cf [13]).

• Discussion sur les formulations présentées

Nous commençons par distinguer ces formulations suivant la terminologie employée dans le domaine des équations intégrales.

Toutes les formulations (1.24), (1.35), (1.28), (1.29) sont des **équations intégrales de première espèce** car elles font apparaître une inconnue qui n'intervient que sous un intégrant. Les **équations intégrales de seconde espèce** sont aussi très importantes en pratique, mais nous ne les envisagerons pas ici et on renvoie le lecteur aux livres [1], [18], [24], [8] pour une étude théorique et numérique de telles équations.

Un autre terme distinctif employé est celui de **méthodes directes** par opposition aux **méthodes indirectes**.

Les méthodes indirectes font intervenir des quantités (densité de potentiel de simple ou de double couche) qui n'ont pas de signification directe dans le problème aux EDP initial. Ainsi les formulations (1.24) et (1.35) sont indirectes. En effet considérons l'équation (1.24), on montre que l'inconnue q représente le saut de $\frac{\partial u}{\partial n}$ si on prolonge la fonction u^i solution du problème (1.6) par la fonction u^e solution du problème (1.7) avec la même condition au bord $f = u_0$.

Ceci étant dit, penchons nous maintenant sur l'intérêt pratique de ces diverses formulations. Nous avons vu qu'elles sont de la forme $A(q) = f$ et que leur résolution permet ensuite de déterminer la solution du problème (1.6) (ou (1.7)).

Les aspects qui les différencient sont : existence et unicité d'une solution, singularité de l'opérateur intégral A , continuité de A^{-1} .

Les formulations (1.24) et (1.29) font intervenir un opérateur A qui est régulier, on parle quelquefois de **formulation régulière**.

On a montré que l'équation (1.35) n'admettait de solution que sous des conditions restrictives pour la donnée u_0 , nous préférons donc retenir la formulation (1.29) sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Signalons tout de même que ces deux formulations sont assez voisines car elles font intervenir sensiblement le même opérateur A . En pratique la formulation (1.35) est quelquefois utilisée par des ingénieurs et les méthodes numériques correspondantes portent le nom de "regular indirect boundary element methods". On renvoie le lecteur à l'article [28] qui montre un exemple d'utilisation et donne quelques références. D'autre part, la méthode MFS, dont nous avons déjà vaguement parlé est, elle aussi, basée sur la formulation (1.35) et semble particulièrement appréciée des ingénieurs, vu le nombre élevé d'articles à son sujet : [11], [12], [13], [14], [15], [16] et [7] chap 4. Elle consiste à chercher une densité approchée q dans l'espace vectoriel engendré par les n masses de Dirac correspondant à n points choisis sur $\tilde{\Gamma}$, puis à imposer que l'équation (1.35) avec la densité approchée soit vérifiée en n points

choisis sur Γ . Ainsi, il n'y a plus aucune intégrale à calculer. Cependant, en plus du problème relatif à l'existence d'une solution de l'équation (1.35), cette méthode en rencontre d'autres : choix de la courbe auxiliaire, difficulté de l'analyse mathématique du fait de l'utilisation de masses de Dirac, ... Nous restons quelque peu sceptiques devant cette méthode qui semble exiger des précautions particulières pour un bon fonctionnement.

Les équations (1.24) et (1.28) font intervenir le même opérateur A qui est singulier et elles ne diffèrent que par le second membre f . Ce sont des formulations sensiblement équivalentes qui présentent un grand intérêt et sont souvent utilisées en pratique. Comme l'opérateur A est un isomorphisme (cf lemme 1.6), le problème $A(q) = f$ est bien posé et on peut le résoudre de manière approchée en utilisant une méthode de projection.

Cette méthode présente cependant l'inconvénient de nécessiter le calcul d'intégrales singulières, ce qui peut rendre assez délicate son implantation sur ordinateur (surtout en dimension 3).

Malgré cela, c'est une méthode couramment utilisée car elle converge rapidement et nous la retiendrons comme étant la méthode de référence.

Regardons de plus près la formulation (1.29) : c'est une formulation régulière et elle admet une unique solution. Malheureusement, d'un autre côté c'est sa régularité qui pose problème. En effet l'opérateur $A = S_{\Gamma, \tilde{\Gamma}} : \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\tilde{\Gamma})$, est compact donc non continûment inversible et il n'est donc pas possible d'appliquer directement une méthode de projection pour obtenir un schéma numérique efficace.

De plus, si les courbes Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont analytiques, alors le noyau de A est aussi analytique et on peut montrer (cf [18] page 236) que le problème est très mal posé (les valeurs singulières de A s'accumulent au moins exponentiellement vers 0).

Historiquement, cette formulation a été introduite par V.D. Kupradze (cf [20]). Plus tard S.Christiansen a entrepris de l'analyser mathématiquement et numériquement (cf [4] et [5]). Dans l'article [4], il utilise une méthode de collocation pour résoudre (1.29) et obtient des résultats encourageants mais il se place toujours dans le cas où l'espace discret est de petite dimension. Lorsque Ω est un disque, il établit une formule explicite qui donne la valeur du conditionnement du système linéaire obtenu. Sa formule montre que si la courbe auxiliaire est maintenue fixement, le conditionnement est une fonction exponentielle de la dimension du système linéaire.

D'autres auteurs évoquent la possibilité d'utiliser la régularisation de Tikhonov pour résoudre (1.29) ou (1.35) (cf [18] pages 270-288). Cependant cette méthode converge lentement et elle n'a pas de véritable intérêt pratique en dehors de certains domaines particuliers comme par exemple les problèmes inverses où la frontière n'est pas connue (cf [18] pages 279-288 et [17]).

En pratique les ingénieurs qui ont tenté de résoudre les équations (1.29) ou (1.35) se sont rendus compte que plus on désirait les discrétiser finement, plus il était nécessaire de rapprocher la courbe auxiliaire de la frontière du domaine. Ainsi ils ont obtenu des méthodes satisfaisantes, qui ont été utilisées pour divers problèmes aux EDP : thermique, mécanique des fluides, élastostatique, ... On pourra consulter par exemple l'article [28] mais on n'y trouvera qu'une description d'une méthode et des exemples d'utilisation.

Il semble que jusqu'à aujourd'hui aucune étude sérieuse de l'erreur n'a été effectuée pour une de ces méthodes "RBEM", mis à part pour la méthode MFS pour laquelle on peut consulter [11], [12] et [13]. Notre but, dans cette thèse est de combler au moins partiellement cette lacune et de démontrer des résultats de convergence.

La méthode numérique que nous allons étudier a été présentée dans la première section.

Remarquons que le schéma numérique (1.4) est basé sur une suite de formulations, où chaque

formulation admet la même solution mais fait intervenir un opérateur et un second membre différents. Cette suite est indexée par n , qui désigne aussi la dimension de l'espace discret dans lequel on cherche une solution approchée.

Remarquons aussi que la formulation tend à devenir singulière lorsque n tend vers l'infini, et donc que le gain en "régularité" est limité si l'on veut des résultats très précis.

Nous montrerons que ce compromis est obligatoire car il assure la stabilité du schéma.

Avant de commencer l'étude à proprement parler, nous redéfinissons les opérateurs $S_{\Gamma,\Gamma}, S_{\Gamma,\tilde{\Gamma}_n}, Q_{\Gamma,\Gamma}, Q_{\Gamma,\tilde{\Gamma}_n}$, comme des opérateurs qui agissent sur un espace de fonctions fixé une fois pour toute (indépendamment de n). Nous transformons aussi l'écriture des schémas numériques en faisant intervenir les nouveaux opérateurs.

• Schémas numériques

Une première approche du problème (1.6), nous a conduits à nous intéresser aux équations intégrales (1.24) et (1.29).

On considère les courbes Γ et $\tilde{\Gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$, données par des paramétrisations régulières :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}, \\ \tilde{\Gamma}_n &= \{x_n(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}, \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Le changement de variable $H^s(\Gamma) \rightarrow H^s$, donné par $w(t) = q(x(t))\|x'(t)\|$, $t \in [0, 1]$, nous permet de transformer les opérateurs $S_{\Gamma,\Gamma}, S_{\Gamma,\tilde{\Gamma}_n}, Q_{\Gamma,\Gamma}$ et $Q_{\Gamma,\tilde{\Gamma}_n}$ en des opérateurs "équivalents"

$$\begin{aligned}S, S_n &: H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2}, \\ Q, Q_n &: H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}.\end{aligned}$$

Formellement on a :

$$\begin{aligned}(S_{\Gamma,\Gamma}q)(x(s)) &= \int_{\Gamma} q(y)K(x(s), y)ds_y = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(y(t))\|y'(t)\| \log \|x(s) - y(t)\| dt \\ &= S(w)(s) \quad s \in [0, 1],\end{aligned}\tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}(S_{\Gamma,\tilde{\Gamma}_n}q)(x_n(s)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(y(t))\|y'(t)\| \log \|x_n(s) - y(t)\| dt \\ &= S_n(w)(s) \quad s \in [0, 1], n \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}(Q_{\Gamma,\Gamma}q)(x(s)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(y(t))\|y'(t)\| \frac{\partial}{\partial n_y} \log \|x(s) - y(t)\| dt \\ &= Q(w)(s) \quad s \in [0, 1],\end{aligned}\tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}(Q_{\Gamma,\tilde{\Gamma}_n}q)(x_n(s)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(y(t))\|y'(t)\| \frac{\partial}{\partial n_y} \log \|x_n(s) - y(t)\| dt \\ &= Q_n(w)(s) \quad s \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Ainsi l'équation (1.29) revient à

$$\text{chercher } w \in \tilde{H}^{-1/2} \text{ tq } S_n(w) = Q_n(w_0),\tag{1.40}$$

où $w_0(t) = u_0(x(t))\|x'(t)\|$, $t \in [0, 1]$, est la donnée.

La solution du problème (1.6) avec la condition au bord $f = u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ s'obtient en

posant

$$u(z) = \int_0^1 (w(t)K(z, x(t)) - w_0(t)K_{n_y}(z, x(t))) dt, \quad z \in \Omega.$$

De la même manière, l'équation (1.24) est équivalente à

$$\begin{aligned} \text{chercher } w \in \tilde{H}^{-1/2} \text{ tq } < S(w), w' >_{1/2, -1/2} = < w_0, w' >_{1/2, -1/2}, \\ \forall w' \in \tilde{H}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

La solution du problème (1.6) avec la condition au bord $f = u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ s'obtient alors en posant

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_0^1 w(t)K(z, x(t))dt + \beta, \\ \text{avec } \beta &= \int_0^1 \int_0^1 (w_0(t)K_{n_y}(x(s), x(t)) - w(t)K(x(s), x(t))) dt ds. \end{aligned}$$

A partir des opérateurs S_n et S , on définit les formes bilinéaires $a, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} a, a_n : H^{-1/2} \times H^{-1/2} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ a(u, v) &= < v, Su >_{-1/2, 1/2}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$a_n(u, v) = < v, S_n u >_{-1/2, 1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.43)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, remarquons que l'opérateur S_n agit de $\tilde{H}^{-1/2}$ dans un sous-espace de $H^{1/2} = \mathbb{R} \oplus \tilde{H}^{1/2}$, qui n'est pas nécessairement inclus dans $\tilde{H}^{1/2}$.

On montre alors qu'au lieu de considérer l'équation (1.40), on cherche $w \in \tilde{H}^{-1/2}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$S_n(w) + \beta = Q_n(w_0). \quad (1.44)$$

Cette dernière équation admet une unique solution et est encore équivalente au système

$$< S_n(w), w' >_{1/2, -1/2} = < Q_n(w_0), w' >_{1/2, -1/2}, \quad \forall w' \in \tilde{H}^{-1/2}, \quad (1.45)$$

$$\beta = < Q_n(w_0) - S_n(w), 1 >_{1/2, -1/2}. \quad (1.46)$$

On obtient ensuite la solution de (1.6) en posant

$$u(z) = \beta + \int_0^1 (w(t)K(z, x(t)) - w_0(t)K_{n_y}(z, x(t))) dt, \quad z \in \Omega.$$

Remarquons enfin que si en pratique c'est bien l'équation (1.45) que l'on devra résoudre, rien ne nous empêche pour la théorie de remplacer S_n et Q_n dans (1.45) par $\tilde{S}_n$ et $\tilde{Q}_n$ qui sont à moyenne nulle (et qui coïncident avec S_n et Q_n à une constante près).

Dans la suite, il nous arrivera de faire implicitement cette modification sans changer de notation (i.e on supposera que S_n est à moyenne nulle).

En utilisant les définitions (1.42) et (1.43), nous écrivons maintenant les équations intégrales (1.24) et (1.29) sous forme variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } w_0 \in H^{1/2}, \text{ on cherche } u \in \tilde{H}^{-1/2} \text{ tq} \\ a(u, v) = \langle v, w_0 \rangle_{-1/2, 1/2}, \quad \forall v \in \tilde{H}^{-1/2}. \end{array} \right. \quad (1.47)$$

$$\begin{cases} \text{Pour } w_0 \in H^{1/2}, \text{ on cherche } u \in \tilde{H}^{-1/2} \text{ tq} \\ a_n(u, v) = \langle v, Q_n w_0 \rangle_{-1/2, 1/2}, \quad \forall v \in \tilde{H}^{-1/2}. \end{cases} \quad (1.48)$$

Les schémas discrets s'obtiennent ensuite en utilisant une suite d'espace $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $V_n \subset \tilde{H}^{-1/2}$ et $\dim(V_n) = n$. On obtient :

$$\begin{cases} \text{Pour } w_0 \in H^{1/2} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on cherche } u_n \in V_n \text{ tq} \\ a(u_n, v) = \langle v, w_0 \rangle_{-1/2, 1/2}, \quad \forall v \in V_n. \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\begin{cases} \text{Pour } w_0 \in H^{1/2} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on cherche } \tilde{u}_n \in V_n \text{ tq} \\ a_n(\tilde{u}_n, v) = \langle v, Q_n w_0 \rangle_{-1/2, 1/2}, \quad \forall v \in V_n. \end{cases} \quad (1.50)$$

Remarque 1.6 Dans l'équation intégrale (1.48) intervient le paramètre $n \in \mathbb{N}$ mais la solution est indépendante de ce paramètre. Ce n'est que pour le schéma discret associé (1.50) que l'utilisation d'une famille de formes bilinéaires $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est importante.

Nous savons (cf lemme 1.6) que le schéma (1.49) est stable et qu'avec un bon choix de la suite d'espace $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il sera convergent. Malheureusement, le lemme en question n'est d'aucun secours pour déterminer si le schéma (1.50) est lui aussi bien posé. Intéressons nous donc à une autre manière d'analyser le schéma (1.49). On considère (cf [27]) la décomposition

$$S = D + K, \quad (1.51)$$

avec

$$D(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \|\nu(s) - \nu(t)\| dt, \quad (1.52)$$

$$K(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \frac{\|x(s) - x(t)\|}{\|\nu(s) - \nu(t)\|} dt, \quad (1.53)$$

où $\{\nu(t) = (c \cos(2\pi t), c \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1]\}$ est une paramétrisation régulière du cercle de rayon c , centré en 0.

On constate ensuite que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction v_k est un vecteur propre de D associée à la valeur propre $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Etant donné que le système $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H^s pour tout $s \in \mathbb{R}$, on obtient la représentation spectrale de D :

$$D : H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2} \quad (1.54)$$

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_k(x) \rightarrow (Du)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \lambda_k v_k(x). \quad (1.55)$$

Il est alors facile de montrer (cf [27] page 311) que la forme bilinéaire $a(u, v) = \langle Du, v \rangle_{1/2, -1/2}$ est coercive sur $\tilde{H}^{-1/2} \times \tilde{H}^{-1/2}$

(et même sur $H^{-1/2} \times H^{-1/2}$ si $c \neq 1$).

L'autre fait remarquable est que l'opérateur K réalise une "régularisation infinie", en d'autres termes on a $K \in \mathcal{K}(H^s, H^t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$. Ceci se vérifie aisément car le noyau

$k(s, t) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\|x(s) - x(t)\|}{\|\nu(s) - \nu(t)\|}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$. En effet, lorsque $s = t$ la singularité n'est qu'apparente et on a $k(s, s) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\|x'(s)\|}{\|\nu'(s)\|}$.

Finalement S est une perturbation compacte d'un opérateur positif.

Nous allons voir qu'en s'inspirant de cela nous pourrions analyser le schéma (1.50). On considère cette fois-ci la décomposition

$$S_n = D_n + K_n, \quad (1.56)$$

avec

$$D_n(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \|\nu_n(s) - \nu(t)\| dt, \quad (1.57)$$

$$K_n(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \frac{\|x_n(s) - x(t)\|}{\|\nu_n(s) - \nu(t)\|} dt, \quad (1.58)$$

où $\{\nu_n(t) = (c_n \cos(2\pi t), c_n \sin(2\pi t))\}$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, est une paramétrisation régulière du cercle de rayon c_n , centré en 0.

Nous supposons dans un premier temps que Γ est un cercle de rayon c , ce qui revient à dire que $S_n = D_n$. Dans le paragraphe 1.3, nous ferons l'analyse complète du schéma (1.50) dans ce cas particulier.

Dans le paragraphe 1.4, nous ferons l'analyse dans le cas général. On utilisera pour cela la décomposition (1.56) et nous montrerons que les conclusions du paragraphe 1.3 concernant l'efficacité du schéma (1.50) demeurent inchangées.

1.3 Analyse sur le cas circulaire.

Dans cette section, nous considérons le cas où le domaine Ω est un disque.

Sans perdre en généralité, on peut le supposer centré sur l'origine et de rayon c . Pour les courbes auxiliaires $\tilde{\Gamma}_n$, on prend des cercles de même centre que Γ et de rayon c_n , $n \in \mathbb{N}$.

Il est alors possible de déterminer explicitement les valeurs propres et vecteurs propres des opérateurs S, S_n, Q, Q_n .

Ce résultat nous servira ensuite à montrer que la convergence du schéma (1.50) dépend du comportement asymptotique de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = |c - c_n|$. Nous montrerons que si $d_n = O(1)$ lorsque n tend vers l'infini, il n'y a en principe pas de convergence, le schéma (1.50) étant mal posé. Par contre si

$$d_n = O(1/n) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (1.59)$$

alors pour tout entier n , le schéma (1.50) admet une unique solution $u_n \in V_n$. De plus, l'erreur $\|u - u_n\|_{-1/2}$, où u est l'unique solution de (1.48), est en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^{3/2}})$, c'est à dire du même ordre que pour la méthode (1.49) de référence.

Ainsi comme nous l'avons annoncé lors de la présentation de la méthode, nous choisirons les rayons des cercles auxiliaires pour qu'ils vérifient la relation (1.59).

Ceci implique que, lorsque n devient grand, les opérateurs intégraux S_n, Q_n présents dans notre schéma deviennent de plus en plus "ressemblant" aux opérateurs S, Q qui sont singuliers. Pour remédier à cela, nous donnerons une règle d'intégration numérique qui permette de conserver l'ordre de convergence de la méthode.

1.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres des opérateurs

Nous utilisons l'écriture complexe pour la paramétrisation des cercles Γ et $\tilde{\Gamma}_n$:

$$\Gamma = \{z(t) \in \mathbb{C}, z(t) = c.e^{2i\pi t}, t \in [0, 1]\}, \quad (1.60)$$

$$\tilde{\Gamma}_n = \{z_n(t) \in \mathbb{C}, z_n(t) = c_n.e^{2i\pi t}, t \in [0, 1]\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.61)$$

et on définit la suite de nombres réels $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\gamma_n = \begin{cases} c_n/c & \text{si } c_n \geq c, \\ c/c_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.7 Cette définition de la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet d'analyser simultanément la méthode pour le problème (1.6) et pour le problème (1.7). En effet dans le premier cas on a $c_n > c$ pour tout n et dans le deuxième $c_n < c$, mais on a toujours $\gamma_n > 1$.

Remarquons aussi que comme Γ et $\tilde{\Gamma}_n$ sont donnés par les paramétrisations (1.60) et (1.61), on a

$$(S_n \tilde{q})(s) = \frac{1}{2\pi c} \left(S_{\Gamma, \tilde{\Gamma}_n} q \right) (c_n e^{2i\pi s}), \quad (1.62)$$

$$(Q_n \tilde{q})(s) = \frac{1}{2\pi c} \left(Q_{\Gamma, \tilde{\Gamma}_n} q \right) (c_n e^{2i\pi s}), \quad (1.63)$$

où on a posé $\tilde{q}(t) = q(c e^{2i\pi t})$, $t \in [0, 1]$.

Nous voulons déterminer les couples $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times H^{-1/2}$ et $(\mu, \varphi) \in \mathbb{R} \times H^{1/2}$ tels que

$$S_n q = \lambda q,$$

$$Q_n \varphi = \mu \varphi.$$

Il est possible de déterminer de tels couples en effectuant directement des calculs intégraux à partir des expressions explicites des opérateurs S_n et Q_n .

Nous préférons utiliser l'analyse complexe pour démontrer les lemmes suivants :

Lemme 1.8 Soit $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors les couples $(\lambda_k^n, q_k^n)_{k \in \mathbb{Z}}$ définis par

$$\begin{aligned} \lambda_0^n &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(c) & \text{si } c_n < c, \\ -\frac{1}{2\pi} \log(c_n) & \text{si } c_n > c, \end{cases} & q_0^n &= 1, \\ \lambda_k^n &= \frac{1}{4\pi|k|} \gamma_n^{-|k|}, & q_k^n &= v_k \text{ (où } v_k(s) = e^{2i\pi k s}), \quad k \in \mathbb{Z}^*, \end{aligned}$$

forment un système de valeurs propres et vecteurs propres associés pour l'opérateur S_n .

Preuve.

Soit q une fonction régulière définie sur Γ , on pose

$$v(z) = S_{\Gamma, \tilde{\Gamma}_n}(q)(z) = \int_{\Gamma} q(y) K(z, y) ds_y, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.64)$$

Cette fonction vérifie

$$[v]_{\Gamma} = 0, \quad (1.65)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\Gamma} = q, \quad (1.66)$$

$$\Delta v = 0, \quad \text{dans } \Omega \cup \Omega', \quad (1.67)$$

$$v(z) = \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q(y) ds_y \right) \log |z| + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty. \quad (1.68)$$

• On considère la fonction $q \equiv 1$, définie pour $z \in \Gamma$ et on lui associe la fonction 1-périodique $\tilde{q}(t) = q(c e^{2i\pi t}) \equiv 1$.

Soit α et β deux réels, on pose

$$w(z) = \begin{cases} \alpha \log(c) & \text{si } |z| < c, \\ \beta \log |z| & \text{si } |z| > c. \end{cases}$$

On remarque que cette fonction vérifie la relation (1.67). A l'intérieur et à l'extérieur de la courbe Γ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^i}{\partial n}(c.e^{i\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial w^e}{\partial n}(c.e^{i\theta}) &= \frac{\beta}{c}.\end{aligned}$$

On vérifie alors qu'en prenant $\alpha = \beta = -c$, les relations (1.65), (1.66) et (1.68) sont aussi satisfaites par w .

Ainsi on a

$$v(z) = \begin{cases} -c \log(c) & \text{si } |z| < c, \\ -c \log |z| & \text{si } |z| > c, \end{cases}$$

ce qui implique que

$$S_n(1)(s) = \frac{1}{2\pi c} v(c_n.e^{2i\pi s}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(c) & \text{si } c_n < c, \\ -\frac{1}{2\pi} \log(c_n) & \text{si } c_n > c. \end{cases}$$

Le premier point est ainsi démontré.

• On considère maintenant la fonction $q(z) = \frac{z^k}{c^k}$, où k est un entier non nul.

On lui associe la fonction $\tilde{q}(t) = q(c.e^{2i\pi t}) = v_k(t)$, et pour calculer $S_n(\tilde{q})$ on considère à nouveau la fonction v définie par la relation (1.64).

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 quatre réels, on pose

$$w(z) = \begin{cases} \beta_1 \operatorname{Re}(z^{|k|}) + i.\beta_2 \operatorname{Im}(z^{|k|}) & \text{si } |z| < c, \\ \alpha_1 \operatorname{Re}(z^{-|k|}) + i.\alpha_2 \operatorname{Im}(z^{-|k|}) & \text{si } |z| > c. \end{cases}$$

Cette fonction vérifie la relation (1.67) car $z^{|k|}$ est holomorphe dans Ω et $z^{-|k|}$ est holomorphe dans Ω' . La relation (1.68) est trivialement vérifiée et les conditions (1.65) et (1.66) sont satisfaites si

$$\begin{aligned}\alpha_1 c^{-|k|} - \beta_1 c^{|k|} &= 0, \\ \alpha_2 c^{-|k|} + \beta_2 c^{|k|} &= 0, \\ \alpha_1 c^{-|k|} + \beta_1 c^{|k|} &= \frac{c}{|k|}, \\ \alpha_2 c^{-|k|} - \beta_2 c^{|k|} &= -\epsilon_k \frac{c}{|k|},\end{aligned}$$

où on a posé $\epsilon_k = \operatorname{Sgn}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Ce système se résout facilement et on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{c}{2|k|} c^{|k|}, & \beta_1 &= \frac{c}{2|k|} c^{-|k|}, \\ \alpha_2 &= -\frac{\epsilon_k c}{2|k|} c^{|k|}, & \beta_2 &= \frac{\epsilon_k c}{2|k|} c^{-|k|}.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$S_n(v_k)(s) = \frac{1}{2\pi c} v(c_n.e^{2i\pi s}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|k|} \gamma_n^{-|k|} v_k(s) & \text{si } c_n < c, \\ \frac{1}{4\pi|k|} \gamma_n^{-|k|} v_k(s) & \text{si } c_n > c. \end{cases}$$

■

Lemme 1.9 Soit $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors les couples $(\mu_k^n, \varphi_k^n)_{k \in \mathbb{Z}}$ définis par

$$\mu_0^n = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi c} & \text{si } c_n < c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \varphi_0^n = 1,$$

$$\mu_k^n = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi c} \gamma_n^{-|k|} & \text{si } c_n < c, \\ \frac{1}{4\pi c} \gamma_n^{-|k|} & \text{si } c_n > c, \end{cases} \quad \varphi_k^n = v_k, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

forment un système de valeurs propres et vecteurs propres associés pour l'opérateur Q_n .

Preuve.

On procède comme dans la démonstration du lemme 1.8 : pour φ régulière définie sur Γ , on pose

$$v(z) = Q_{\Gamma, \tilde{\Gamma}_n}(\varphi)(z) = \int_{\Gamma} \varphi(y) K_{n_y}(z, y) ds_y, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.69)$$

Cette fonction vérifie

$$[v]_{\Gamma} = -\varphi, \quad (1.70)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (1.71)$$

$$\Delta v = 0, \quad \text{dans } \Omega \cup \Omega', \quad (1.72)$$

$$v(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty. \quad (1.73)$$

- On considère les fonctions $\varphi(z) \equiv 1$ pour $z \in \Gamma$ et $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(c.e^{2i\pi t}) \equiv 1$.

On vérifie que la fonction v donnée par $v(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } |z| < c, \\ 0 & \text{si } |z| > c, \end{cases}$ est la solution du problème (1.70) à (1.73), et donc que

$$Q_n(1)(s) = \frac{1}{2\pi c} v(c_n.e^{2i\pi s}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi c} & \text{si } c_n < c, \\ 0 & \text{si } c_n > c. \end{cases}$$

- Soit $k \in \mathbb{Z}^*$, on considère la fonction définie sur Γ par $\varphi(z) = \frac{z^k}{c^k}$ et on lui associe la fonction 1-périodique $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(c.e^{2i\pi t}) = v_k(t)$.

Nous cherchons une solution du problème (1.70) à (1.73) de la forme

$$v(z) = \begin{cases} \alpha_1 Re(z^{-|k|}) + i.\alpha_2 Im(z^{-|k|}) & \text{si } |z| > c, \\ \beta_1 Re(z^{|k|}) + i.\beta_2 Im(z^{|k|}) & \text{si } |z| < c. \end{cases}$$

Les équations (1.72) et (1.73) sont automatiquement vérifiées et les équations (1.70) et (1.71) s'écrivent

$$\begin{aligned} \alpha_1 c^{-|k|} + \beta_1 c^{|k|} &= 0, \\ \alpha_2 c^{-|k|} - \beta_2 c^{|k|} &= 0, \\ \alpha_1 c^{-|k|} - \beta_1 c^{|k|} &= 1, \\ \alpha_2 c^{-|k|} + \beta_2 c^{|k|} &= -\epsilon_k. \end{aligned}$$

La résolution de ce système nous donne

$$v(r.e^{i\theta}) = \begin{cases} -\frac{c^{-|k|}}{2} r^{|k|} . e^{ik\theta} & \text{si } r < c, \\ \frac{c^{|k|}}{2} r^{-|k|} . e^{ik\theta} & \text{si } r > c, \end{cases}$$

ce qui montre que

$$Q_n(v_k)(s) = \frac{1}{2\pi c} v(c_n \cdot e^{2i\pi s}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi c} \gamma_n^{-|k|} \cdot v_k(s) & \text{si } c_n < c, \\ \frac{1}{4\pi c} \gamma_n^{-|k|} \cdot v_k(s) & \text{si } c_n > c. \end{cases}$$

■

Nous allons maintenant préciser la suite d'espaces discrets $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que nous allons utiliser pour les schémas (1.49) et (1.50).

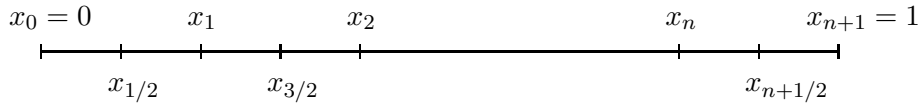
Nous montrerons ensuite le résultat central de notre étude, à savoir que si on choisit la suite de rayon $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d_n = O(1/n)$ lorsque n tend vers l'infini, alors la famille de forme bilinéaire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété de "coercivité discrète" de façon uniforme :

$$\begin{aligned} \exists \gamma > 0 \text{ indépendante de } n \text{ telle que} \\ a_n(u, u) \geq \gamma \|u\|_{-1/2}^2, \quad \forall u \in V_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

1.3.2 Discrétisation de $H^{-1/2}$ et base échantillonnée

• Discrétisation de $H^{-1/2}$

Soit n un entier positif, on pose $h = \frac{1}{n+1}$, $x_j = j \cdot h$, $j = 0, \dots, n+1$ et $x_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})h$, $j = 0, \dots, n$.



On définit les espaces $\hat{V}_n \subset H^{-1/2}$ et $V_n \subset \tilde{H}^{-1/2}$ par

$$\hat{V}_n = \text{Vect} \{ \chi_1, \dots, \chi_{n+1} \}, \quad (1.75)$$

$$V_n = \left\{ f \in \hat{V}_n, \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}, \quad (1.76)$$

où les fonctions χ_j , $j = 1, \dots, n+1$ sont 1-périodiques, et leurs restrictions sur $[-1, 1]$ sont données par

$$\begin{cases} \chi_j = 1_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} & j \in 1..n, \\ \chi_{n+1} = 1_{[x_{n+1/2}, 1] \cup [0, x_{1/2}]}. \end{cases} \quad (1.77)$$

Remarque 1.8 Nous avons choisi la base de $\hat{V}_n$ donnée par les relations (1.75) et (1.77) car cela simplifie l'étude théorique qui va suivre. Cependant, il est bien clair qu'en pratique ce choix n'est pas obligatoire, ni même à conseiller. En fait il est préférable de choisir la base

$$\hat{\beta}_n = \{ \eta_1, \dots, \eta_{n+1} \}, \quad (1.78)$$

où les fonctions η_j , $j = 1, \dots, n+1$ sont 1-périodiques, et leurs restrictions sur $[-1, 1]$ sont données par

$$\eta_j = 1_{[x_{j-1}, x_j]}. \quad (1.79)$$

On obtient ensuite une base β_n de V_n par

$$\beta_n = \{ \psi_1, \dots, \psi_n \}, \quad \psi_j = \eta_j - \eta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.80)$$

On introduit l'opérateur d'interpolation :

$$\begin{aligned}\Pi_n : H^1 &\rightarrow \hat{V}_n \\ \Pi_n u(x) &= \sum_{j=1}^{n+1} u(x_j) \chi_j(x).\end{aligned}$$

• **Base échantillonnée**

On considère le développement en série de Fourier des fonctions χ_j ,
 $j = 1, \dots, n+1$:

$$\begin{aligned}\chi_j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} v_k(x), \\ \text{avec } c_{jk} &= \int_0^1 \chi_j(x) v_{-k}(x) dx.\end{aligned}\tag{1.81}$$

Un rapide calcul donne

$$\begin{cases} c_{jk} = \frac{\sin(k\pi h)}{k\pi} v_{-k}(x_j), & j \in 1..n+1, k \in \mathbb{Z}^*, \\ c_{j0} = h, & j = 1, \dots, n+1. \end{cases}\tag{1.82}$$

Nous introduisons maintenant un théorème fondamental pour notre étude. Nous l'avons appelé théorème d'échantillonnage car il repose sur l'idée que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la décomposition de l'interpolé $\Pi_n v_m$ ($m \in 1..n+1$) dans la base $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une série réduite sur des indices de la forme de $m + p(n+1)$, $p \in \mathbb{Z}$. En quelque sorte, seule la fréquence fondamentale et les fréquences fondamentales augmentées d'un multiple de $n+1$ apparaissent, lors de l'échantillonnage des fonctions $\Pi_n v_m$ ($m \in 1..n+1$).

Théorème 1.2 (échantillonnage)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités (au sens de la convergence quadratique) suivantes :

$$\begin{aligned}\Pi_n v_{n+1} &= 1, \\ \Pi_n v_m &= \frac{n+1}{\pi} \sin(m\pi h) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p \frac{v_{m+p(n+1)}}{m+p(n+1)}, \quad m = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Preuve.

Soit $1 \leq m \leq n+1$, on a

$$\begin{aligned}\Pi_n v_m(x) &= \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) \left(h + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\sin(k\pi h)}{k\pi} v_{-k}(x_j) v_k(x) \right) \\ &= h \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\sin(k\pi h)}{k\pi} \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) v_{-k}(x_j) v_k(x).\end{aligned}\tag{1.83}$$

On pose

$$\begin{cases} \mathcal{S}_m^0 = \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j), \\ \mathcal{S}_m^1(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\pi h)}{k\pi} \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) v_{-k}(x_j) v_k(x), \\ \mathcal{S}_m^2(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\pi h)}{k\pi} \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) v_k(x_j) v_{-k}(x). \end{cases}$$

• On vérifie que

$$\begin{cases} \mathcal{S}_m^0 = 0, & \forall m = 1, \dots, n, \\ \mathcal{S}_{n+1}^0 = n+1. \end{cases}\tag{1.84}$$

- Pour $k \geq 1$, on pose $I_{mk} = \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) v_{-k}(x_j)$, et $q = e^{2i(m-k)\pi h}$.

On distingue deux cas :

(1) on suppose qu'il existe un entier p tel que $m - k = p(n + 1)$. On a alors nécessairement $p \leq 0$ et $q = 1$, ce qui implique que $I_{mk} = n + 1$.

Remarquons aussi que si $m = n + 1$ et $m - k = p(n + 1)$ alors

$k = (1 - p)(n + 1)$ et donc $\sin(k\pi h) = 0$.

(2) on suppose qu'il n'existe aucun entier p tel que $m - k = p(n + 1)$. Ceci implique que $q \neq 1$ et donc

$$I_{mk} = q + q^2 + \dots + q^{n+1} = q \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 0,$$

car $q^{n+1} = 1$.

Ainsi nous avons montré que $\mathcal{S}_{n+1}^1 = 0$ et pour $m = 1, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m^1(x) &= \sum_{p \leq 0} \frac{\sin((m - p(n + 1))\pi h)}{(m - p(n + 1))\pi} (n + 1) v_{m - p(n + 1)}(x) \\ &= \frac{n + 1}{\pi} \sin(m\pi h) \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{m + p(n + 1)} v_{m + p(n + 1)}(x). \end{aligned} \quad (1.85)$$

- Pour calculer $\mathcal{S}_m^2(x)$, on procède de la même manière.

Soit $k \geq 1$, on pose $J_{mk} = \sum_{j=1}^{n+1} v_m(x_j) v_k(x_j)$ et $q = e^{2i(m+k)\pi h}$.

On distingue à nouveau deux cas :

(1) on suppose qu'il existe un entier p tel que $m + k = p(n + 1)$. On a alors $p \geq 1$ et $q = 1$, ce qui implique que $J_{mk} = n + 1$. Dans le cas particulier où $m = n + 1$, on a $k = (p - 1)(n + 1)$ et donc $\sin(k\pi h) = 0$.

(2) dans tous les cas restants on a $q \neq 1, q^{n+1} = 1$ et $J_{mk} = 0$.

Ainsi $\mathcal{S}_{n+1}^2 = 0$ et pour $m = 1, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m^2(x) &= \sum_{p \geq 1} \frac{\sin((p(n + 1) - m)\pi h)}{(p(n + 1) - m)\pi} (n + 1) v_{-(p(n + 1) - m)}(x) \\ &= \frac{n + 1}{\pi} \sin(m\pi h) \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p(n + 1) - m} v_{-(p(n + 1) - m)}(x). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Finalement, en rassemblant les relations (1.83) à (1.86) on termine la preuve. ■

Le théorème a un corollaire important :

Corollaire 1.1 Soit $d : H^{-1/2} \times H^{-1/2} \rightarrow \mathbb{R}$, une forme bilinéaire continue telle que $d(v_k, v_{k'}) = 0, \forall k \neq k' \in \mathbb{Z}$.

Alors pour tout $m, m' = 1, \dots, n + 1$ on a

$$\begin{aligned} d(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) &= 0, \quad \text{si } m \neq m', \\ d(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m) &= \frac{(n + 1)^2}{\pi^2} \sin^2(m\pi h) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{d(v_{m+p(n+1)}, v_{m+p(n+1)})}{(m + p(n + 1))^2}, \quad \text{si } m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $m, m' = 1, \dots, n$, on a

$$d(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) = \frac{(n + 1)^2}{\pi^2} \sin(m\pi h) \sin(m'\pi h) \sum_{p, p' \in \mathbb{Z}} (-1)^{p+p'} \frac{d(v_{m+p(n+1)}, v_{m'+p'(n+1)})}{(m + p(n + 1))(m' + p'(n + 1))}.$$

Mais comme $d(v_k, v_{k'}) = 0$ si $k \neq k'$, les termes de la série précédente sont nuls, sauf si $m + p(n+1) = m' + p'(n+1)$.

Cette dernière condition est équivalente à l'équation $m - m' = (p' - p)(n+1)$, qui ne peut-être vérifiée que pour $p = p'$, et ceci implique que $m = m'$.

Dans le cas où $m' = n+1$, on a

$$d(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) = d(\Pi_n v_m, 1) = \frac{n+1}{\pi} \sin(m\pi h) \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \frac{d(v_{m+p(n+1)}, 1)}{m+p(n+1)},$$

mais pour $m = 1, \dots, n$, il n'est pas possible que $m + p(n+1) = n+1$ et on conclut que $d(\Pi_n v_m, 1) = 0$.

Ainsi le premier point du corollaire est démontré.

Le deuxième point est alors évident. ■

Remarque 1.9 *Le produit scalaire sur $H^{-1/2}$ défini par la relation (1.8) avec $s = -1/2$, vérifie l'hypothèse du corollaire 1.1.*

Plus précisément on a

$$\begin{cases} (v_k, v_{k'})_{-1/2} = \frac{\delta_{k,k'}}{|2k\pi|}, & k, k' \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \\ (v_0, v_{k'})_{-1/2} = \delta_{0,k'}, & k' \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.87)$$

Nous déduisons maintenant la

Proposition 1.1 *Le système $\hat{\Lambda}_n = \{\Pi_n v_1, \dots, \Pi_n v_{n+1}\}$ est une base orthogonale (au sens de $(\cdot, \cdot)_0$) de $\hat{V}_n$ et le système $\Lambda_n = \{\Pi_n v_1, \dots, \Pi_n v_n\}$ est une base de V_n .*

Preuve.

De manière évidente, on a $\hat{\Lambda}_n \subset \hat{V}_n$ et $\#\hat{\Lambda}_n = \dim \hat{V}_n = n+1$.

Montrons que les vecteurs $\Pi_n v_1, \dots, \Pi_n v_{n+1}$ sont linéairement indépendants.

On applique le corollaire 1.1 pour la forme bilinéaire $d(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{-1/2}$ (c.f remarque 1.9), on obtient

$$\begin{aligned} d(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) &= \lambda_m \delta_{m,m'}, \quad \forall m, m' \in 1..n, \\ \text{avec } \lambda_m &= \frac{(n+1)^2}{2\pi^3} \sin^2(m\pi h) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+p(n+1)|^3}, \\ d(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{n+1}) &= 0, \quad \forall m \in 1..n, \\ d(\Pi_n v_{n+1}, \Pi_n v_{n+1}) &= d(v_0, v_0) = 1. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que les coefficients λ_m , $m \in 1..n$ sont tous non nuls, et comme les vecteurs $\Pi_n v_m$, $m = 1..n+1$, sont orthogonaux deux à deux, on conclut que le système $\hat{\Lambda}_n$ est libre dans $\hat{V}_n$. C'est-à-dire que c'est une base.

• Le deuxième point est ensuite immédiat :

on vérifie que $\Pi_n v_i \in V_n$, $\forall i \in 1..n$ et comme $\#\Lambda_n = \dim V_n = n$, le système Λ_n est à la fois libre et maximal dans V_n . ■

La proposition suivante permet de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé discret, à l'aide des solutions du problème continu.

Proposition 1.2 *Soit l_1 et l_2 deux formes bilinéaires symétriques continues définies sur $H^{-1/2} \times H^{-1/2}$. On suppose que l_2 est définie positive et que les conditions suivantes sont*

vérifiées :

- (1) $\forall k \in \mathbb{Z}, \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tq } l_1(v_k, u) = \lambda_k l_2(v_k, u), \quad \forall u \in H^{-1/2},$
- (2) $\lambda_k \neq \lambda_{k'} \text{ si } k \neq \pm k',$
- (3) $l_1(v_k, v_{-k}) = l_2(v_k, v_{-k}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m = 1, \dots, n+1$, on pose

$$\tilde{\lambda}_m = \frac{l_1(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m)}{l_2(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m)},$$

et on a les résultats suivants :

i) Le problème aux valeurs propres généralisées :
trouver $u \in \hat{V}_n$, $u \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$l_1(u, \varphi) = \lambda l_2(u, \varphi), \quad \forall \varphi \in \hat{V}_n,$$

admet pour solutions les couples $(\Pi_n v_m, \tilde{\lambda}_m)$, $m = 1, \dots, n+1$.

ii) Le problème aux valeurs propres généralisées :
trouver $u \in V_n$, $u \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$l_1(u, \varphi) = \lambda l_2(u, \varphi), \quad \forall \varphi \in V_n,$$

admet pour solutions les couples $(\Pi_n v_m, \tilde{\lambda}_m)$, $m = 1, \dots, n$.

Preuve. En utilisant les relations (1) et (2) et la symétrie de l_1 et l_2 , on montre que

$$l_1(v_k, v_{k'}) = l_2(v_k, v_{k'}) = 0, \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}, \quad k \neq \pm k'.$$

La relation (3) permet alors d'obtenir que

$$l_1(v_k, v_{k'}) = l_2(v_k, v_{k'}) = 0, \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}, \quad k \neq k'.$$

Ainsi nous pouvons appliquer le corollaire 1.1, on a

$$l_1(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) = l_2(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) = 0, \quad \forall m, m' = 1, \dots, n+1, \quad m \neq m'.$$

Enfin, en utilisant la proposition 1.1, on montre que

$$l_1(\Pi_n v_m, \varphi) = \tilde{\lambda}_m l_2(\Pi_n v_m, \varphi), \quad \forall \varphi \in \hat{V}_n,$$

à condition de choisir $\tilde{\lambda}_m = \frac{l_1(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m)}{l_2(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m)}$, ce qui a un sens car l_2 est définie positive.

Le point i) étant montré, le point ii) se déduit de la proposition 1.1. ■

1.3.3 Stabilité du schéma numérique.

Avec le théorème d'échantillonnage et ses conséquences, nous avons presque tous les outils pour démontrer la propriété (1.74). Cette propriété assure la stabilité du schéma (1.49).

Nous commençons par une remarque :

Remarque 1.10 Dans le lemme 1.8, on peut passer à la limite pour $n \rightarrow \infty$. On montre alors que le système $(\lambda_k, q_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ donné par

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -\frac{1}{2\pi} \log(c), & q_0(t) &= 1, \\ \lambda_k &= \frac{1}{4\pi|k|}, & q_k(t) &= v_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}^*,\end{aligned}$$

est un système de valeurs propres et vecteurs propres associés pour l'opérateur S .

On peut alors constater à l'aide de la remarque 1.9 que la forme bilinéaire $a(.,.)$ coïncide (à un facteur multiplicatif près) avec le produit scalaire $(.,.)_{-1/2}$ sur $\tilde{H}^{-1/2} \times \tilde{H}^{-1/2}$. Ce résultat est bien en accord avec le lemme 1.6, où nous avons énoncé une propriété de coercivité pour $a(.,.)$ sur $\tilde{H}^{-1/2} \times \tilde{H}^{-1/2}$.

On énonce maintenant un lemme fondamental :

Lemme 1.10 Soit n un entier positif, le problème aux valeurs propres généralisées qui consiste à déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ et $u \in V_n$, $u \neq 0$ tels que

$$a_n(u, v) = \mu a(u, v) \quad \forall v \in V_n, \quad (1.88)$$

admet pour solution les couples $(\mu_m, u_m)_{m \in 1..n}$ donnés par

$$\mu_m = \frac{\sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_n^{-|m+p(n+1)|}}{|m+p(n+1)|^3}}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+p(n+1)|^3}}, \quad u_m = \Pi_n v_m,$$

où $\gamma_n \geq 1$ est le rapport des rayons des cercles concentriques.

Preuve. On pose $l_1(.,.) = a_n(.,.)$ et $l_2(.,.) = a(.,.)$.

En utilisant le lemme 1.8 et la remarque 1.10, on vérifie que les formes l_1 et l_2 satisfont toutes les hypothèses de la proposition 1.2.

Ainsi les valeurs propres et vecteurs propres associés solutions de l'équation (1.88) sont donnés par

$$\mu_m = \frac{a_n(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m)}{a(\Pi_n v_m, \Pi_n v_m)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{a_n(v_{m+p(n+1)}, v_{m+p(n+1)})}{(m+p(n+1))^2}}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{a(v_{m+p(n+1)}, v_{m+p(n+1)})}{(m+p(n+1))^2}}, \quad u_m = \Pi_n v_m, \quad m \in 1..n.$$

L'égalité (*) est obtenue grâce au corollaire 1.1. Finalement on utilise à nouveau le lemme 1.8 et la remarque 1.10 pour terminer la preuve.

■

On pose $\mu^{(n)} = \inf_{m \in 1..n} \{\mu_m\}$, une conséquence directe du lemme 1.10 est :

Lemme 1.11 Pour tout entier positif n , on a

$$a_n(u, u) \geq \mu^{(n)} \|u\|_{-1/2}^2, \quad \forall u \in V_n.$$

Preuve. Se déduit du lemme 1.10, en utilisant le principe de Courant (cf [19] page 123) et la remarque 1.10. ■

Le lemme 1.11 nous montre qu'en choisissant une suite de cercles auxiliaires de telle manière que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)} = \mu^\infty > 0$, alors la propriété de coercivité discrète uniforme

(1.74) pour la famille de formes bilinéaires $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera démontrée.

Un tel choix est donné dans le théorème suivant :

Théorème 1.3 *Soit w une constante strictement positive. Si la suite de rayon $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des cercles auxiliaires vérifie $n(c_n - c) \leq w$, alors la relation (1.74) est vraie avec $\gamma = e^{-(l+w/c)}$, où $l = 2 \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^3}$.*

Preuve.

On suppose qu'il existe $w > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $c_n - c \leq \frac{w}{n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m = 1, \dots, n$, on pose

$$\alpha_{m,n} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_n^{-|m+p(n+1)|}}{|m+p(n+1)|^3}, \quad \beta_{m,n} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+p(n+1)|^3}.$$

- On a $\gamma_n \leq \frac{c+\frac{w}{n+1}}{c}$, ce qui donne

$$\gamma_n^{-(n+1)} \geq \left(\frac{1}{1 + \frac{w}{c(n+1)}} \right)^{n+1} \geq \left(e^{-\frac{w}{c(n+1)}} \right)^{n+1} = e^{-w/c}. \quad (1.89)$$

- On note $q = e^{-w/c}$, et on cherche à minorer $\alpha_{m,n}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n} &= \frac{1}{(n+1)^3} \left\{ \gamma_n^{-m} \sum_{p \geq 0} \frac{(\gamma_n^{-(n+1)})^p}{(p + \frac{m}{n+1})^3} + \gamma_n^m \sum_{p \geq 0} \frac{(\gamma_n^{-(n+1)})^{p+1}}{(p+1 - \frac{m}{n+1})^3} \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} \left\{ \gamma_n^{-m} \sum_{p \geq 0} \frac{(\gamma_n^{-(n+1)})^p}{(p + \frac{m}{n+1})^3} + \gamma_n^{-(n+1-m)} \sum_{p \geq 0} \frac{(\gamma_n^{-(n+1)})^p}{(p+1 - \frac{m}{n+1})^3} \right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 0} \frac{(\gamma_n^{-(n+1)})^p}{(p + \frac{m}{n+1})^3} &\geq \left(\frac{n+1}{m} \right)^3 + \sum_{p \geq 1} \frac{q^p}{(p+1)^3} \geq \left(\frac{n+1}{m} \right)^3, \\ \sum_{p \geq 0} \frac{(\gamma_n^{-(n+1)})^p}{(p+1 - \frac{m}{n+1})^3} &\geq \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^3 + \sum_{p \geq 1} \frac{q^p}{(p+1)^3} \geq \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^3. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\alpha_{m,n} \geq \frac{q}{(n+1)^3} \left(\left(\frac{n+1}{m} \right)^3 + \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^3 \right). \quad (1.90)$$

- On cherche maintenant à majorer le dénominateur $\beta_{m,n}$:

$$\begin{aligned} \beta_{m,n} &= \frac{1}{(n+1)^3} \left(\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p + \frac{m}{n+1})^3} + \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1 - \frac{m}{n+1})^3} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^3} \left(\left(\frac{n+1}{m} \right)^3 + \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^3 + 2 \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^3} \right). \end{aligned} \quad (1.91)$$

• On pose $l = 2 \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^3}$ et $\mu_m^n = \frac{\alpha_{m,n}}{\beta_{m,n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in 1..n$.
Les relations (1.90) et (1.91) donnent

$$\mu_m^n \geq q \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{m}\right)^3 + \left(\frac{n+1}{n+1-m}\right)^3}{\left(\frac{n+1}{m}\right)^3 + \left(\frac{n+1}{n+1-m}\right)^3 + l} \geq e^{-(l+w/c)}.$$

Finalement, en utilisant le lemme 1.11, on montre que la relation (1.74) est satisfaite avec $\gamma = e^{-(l+w/c)}$. ■

Remarque 1.11

- Pour le problème de Dirichlet extérieur, le résultat est le même : la relation (1.74) est vraie si $c - c_n \leq \frac{w}{n+1}$ à partir d'un certain rang.
- Si la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{-(n+1)} = 0$ (c'est ce qui se passe en prenant par exemple $c_n = cste$) alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)} = 0$. Dans ce cas la relation (1.74) est fausse et le schéma (1.50) est instable.

Afin d'illustrer numériquement le théorème 1.3 et la remarque 1.11, on a procédé comme suit :

On considère la valeur c pour le rayon du cercle fixe, ainsi que la suite c_n pour les rayons des cercles concentriques. Pour différentes valeurs de n , nous évaluons avec Lapack, les valeurs propres généralisées $\nu \in \mathbb{R}$, solutions de

$$Au = \nu Bu, \quad (1.92)$$

où $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur non nul et A, B sont deux matrices que nous devons préalablement calculer :

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,..,n}, \quad a_{i,j} = a_n(\psi_j, \psi_i), \quad (1.93)$$

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1,..,n}, \quad b_{i,j} = (\psi_i, \psi_j)_{-1/2}, \quad (1.94)$$

où $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ est la base de V_n donnée en (1.80). L'évaluation de A va de soit. Pour évaluer B , nous avons utilisé le fait que la famille de fonctions $(w_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, avec $w_k(x) = \sin(k\pi x)$ forme une base de $\tilde{H}^{-1/2}$. De plus, on vérifie que $(w_k, w'_k)_{-1/2} = \frac{1}{k\pi} \delta_{k,k'}$.

On utilise ensuite les décompositions $\eta_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} w_k(x)$, $i = 1, \dots, n$. Un rapide calcul montre que les coefficients $c_{i,k}$ sont donnés par $c_{i,k} = -\frac{2}{k\pi} \left(\cos \frac{k\pi i}{n+1} - \cos \frac{k\pi(i-1)}{n+1} \right)$.

Ainsi on obtient $b_{i,j} = d_{i,j} - d_{i+1,j} - d_{i,j+1} + d_{i+1,j+1}$, $i, j = 1, \dots, n$, avec

$$d_{i,j} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\cos \frac{k\pi i}{n+1} - \cos \frac{k\pi(i-1)}{n+1} \right) \left(\cos \frac{k\pi j}{n+1} - \cos \frac{k\pi(j-1)}{n+1} \right).$$

Revenons au problème de la résolution de (1.92). Nous avons considéré un premier cas avec $c = 1$ et $c_n = 2$ constant. Pour différentes valeurs entières de n , nous avons vérifié que toutes les n valeurs propres solution de (1.92) étaient positives. Soit μ_{min} la plus petite, dans la figure 1.3, nous avons représenté la courbe $-\log(\mu_{min})$ en fonction de n . On obtient une droite, ce qui montre bien que μ_{min} tend exponentiellement vers 0 avec n et que la propriété de coercivité discrète uniforme (1.74) n'est pas vérifiée.

Nous avons considéré un deuxième exemple avec $c = 1$ et $c_n = c + \frac{10}{n}$, la courbe (cf figure 1.4) donnant μ_{min} en fonction de n montre bien que cette fois-ci la propriété (1.74) est vérifiée.

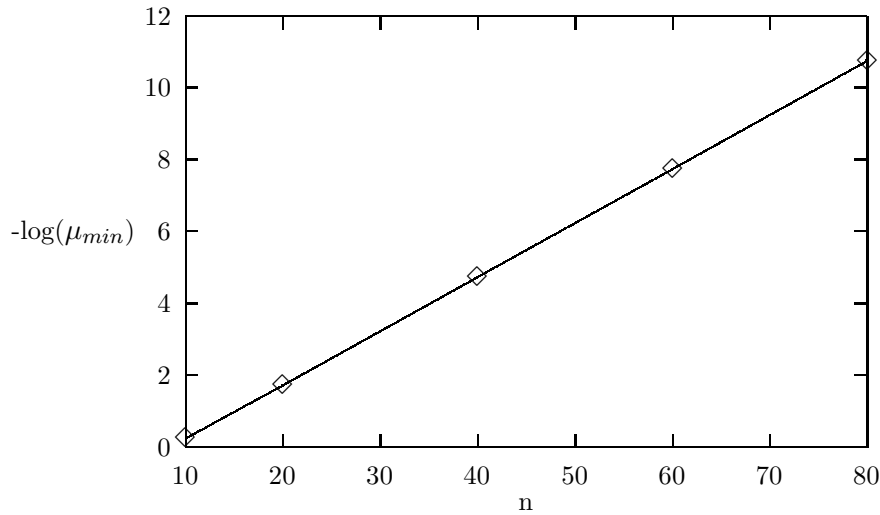


FIG. 1.3 – Cercles auxillaires fixes.

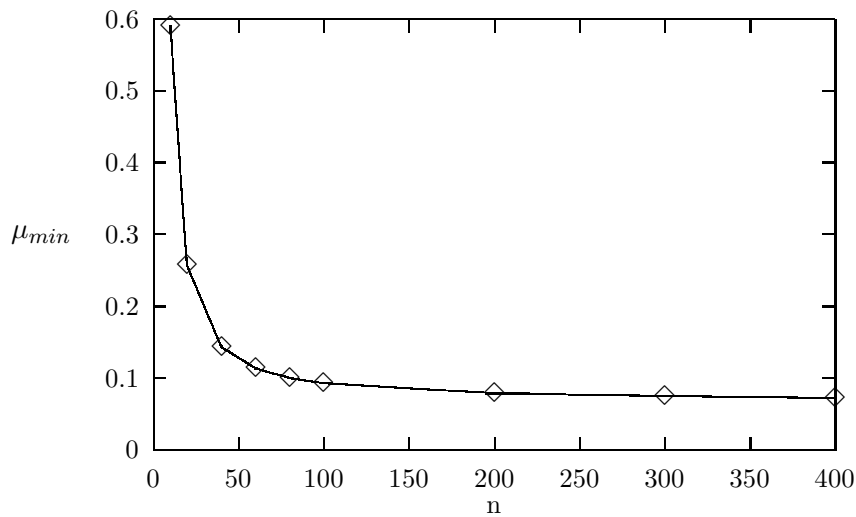


FIG. 1.4 – Cercles auxillaires adaptés.

Suite au théorème 1.3 et aux diverses remarques et illustrations, nous choisissons la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_n - c = O(1/n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Ce choix assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique solution $\tilde{u}_n \in V_n$ vérifiant (1.50).

• Diagonalisation et conditionnement du système linéaire.

Nous insistons ici sur le fait que pour le cas circulaire que nous considérons dans ce chapitre, notre méthode n'a pas de véritable intérêt pratique. Cependant cette étude est instructive car elle révèle que la méthode se comporte bien à tout point de vue dans ce cas simple. D'autre part, comme nous l'avons déjà annoncé, pour l'étude du cas général nous aurons besoin des résultats relatifs au cas circulaire.

Nous allons montrer ici, que la matrice du système (1.50) peut-être diagonalisée explicitement. Cela nous permettra aussi d'estimer le conditionnement du système.

Remarquons que cette diagonalisation explicite n'a rien d'extraordinaire en soit. En effet, on pourrait en faire de même pour la méthode (1.49). Pour les méthodes spectrales (voir

par exemple [1] page 350), le système est même trivialement diagonal dans le cas circulaire. La proposition 1.1, nous assure que le système $\Lambda_n = \{\Pi_n v_1, \dots, \Pi_n v_n, 1\}$ est une base de $\hat{V}_n$. Une conséquence directe de la proposition 1.1, est que dans cette base la matrice du système (1.50) (ceci est aussi vrai pour le système (1.49)) est diagonale. En effet, pour $m, m' = 1, \dots, n+1$, on a

$$a_n(\Pi_n v_m, \Pi_n v_{m'}) = \lambda_m \delta_{m, m'},$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{(n+1)^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{a_n(v_{m+p(n+1)}, v_{m+p(n+1)})}{(m+p(n+1))^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4\pi^3} \sin^2\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_n^{-|m+p(n+1)|}}{|m+p(n+1)|^3}, \text{ pour } m = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\lambda_{n+1} = -\frac{1}{2\pi} \log(\max(c, c_n)). \quad (1.96)$$

Ainsi, on vérifie que la plus petite valeur propre est en $O(\frac{1}{n})$, lorsque n tend vers l'infini, alors que la plus grande est en $O(1)$.

Ceci implique encore que le conditionnement de notre méthode est en $O(n)$ lorsque n tend vers l'infini. Ce résultat est satisfaisant car il indique que notre schéma est peu sensible aux troncatures numériques produites par le calcul informatique. On peut aussi vérifier que si les cercles auxiliaires sont fixes ($c_n = cste$), on retrouve le même résultat que pour la méthode similaire présentée dans [5], à savoir un conditionnement en $O(e^n)$.

Remarquons, à titre de parenthèse, que la matrice de changement de base est facile à déterminer. Considérons par exemple la base $\{\chi_1, \dots, \chi_{n+1}\}$ où les fonctions χ_i , $i = 1, \dots, n+1$ sont données par la relation (1.77).

On considère la décomposition (1.81) : $\chi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_{jk} v_k(x)$, $j = 1, \dots, n+1$, où les coefficients c_{jk} sont donnés en (1.82).

D'autre part, d'après le théorème 1.2, on a

$$\Pi_n v_m(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \frac{v_{m+p(n+1)}(x)}{m+p(n+1)} & \text{pour } m = 1, \dots, n, \\ 1 & \text{pour } m = n+1. \end{cases}$$

Ainsi, pour $k = 1, \dots, n+1$, on a $\chi_k = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{kl} \Pi_n v_l$, avec $\alpha_{kl} = \frac{1}{n+1} e^{-\frac{2i\pi}{n+1} kl}$.

Si on pose $P = (\alpha_{kl})_{k,l=1,\dots,n+1}$, on vérifie que $P^{-1} = (n+1)\bar{P}$.

Nous allons maintenant montrer quelques propriétés supplémentaires qui nous seront utiles au paragraphe suivant. En particulier nous allons montrer que la suite d'opérateur $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $S \in \mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}, H^{1/2})$.

• Convergence ponctuelle de la suite S_n

Nous avons le

Lemme 1.12 *Pour tout $u \in \tilde{H}^{-1/2}$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u) - S(u)\|_{1/2} = 0. \quad (1.97)$$

Preuve.

• Soit $u \in \tilde{H}^{-1/2}$, comme le système $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ est une base hilbertienne de $\tilde{H}^{-1/2}$, on peut

écrire

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} u_k v_k(x),$$

$$\text{avec } \|u\|_{-1/2}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{u_k^2}{|k|} < \infty. \quad (1.98)$$

Ainsi (cf lemme 1.8 et remarque 1.10) on a

$$(S_n - S)(u)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{4\pi|k|} (\gamma_n^{-|k|} - 1) u_k v_k(x),$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} \|(S_n - S)(u)\|_{1/2}^2 &= \frac{1}{8\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|} u_k^2 (\gamma_n^{-|k|} - 1)^2 \\ &\leq \frac{1}{8\pi} \sum_{|k| \leq K} \frac{1}{|k|} u_k^2 (\gamma_n^{-K} - 1)^2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{|k| > K} \frac{1}{|k|} u_k^2, \end{aligned}$$

où K est un réel strictement positif.

Ainsi on obtient

$$\|(S_n - S)(u)\|_{1/2}^2 \leq \frac{1}{4} (\gamma_n^{-K} - 1)^2 \|u\|_{-1/2}^2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{|k| > K} \frac{1}{|k|} u_k^2. \quad (1.99)$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. En utilisant la relation (1.98) on montre que l'on peut choisir $K > 0$ tel que le deuxième terme du membre de droite dans l'inégalité (1.99) soit majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$. Puis K étant fixé, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, le premier terme du membre de droite dans (1.98) soit aussi majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ceci montre bien que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u) - S(u)\|_{1/2} = 0, \quad \forall u \in \tilde{H}^{-1/2}.$$

■

Remarque 1.12 *Il résulte du lemme 1.12 et du théorème de Banach Steinhaus que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}, H^{1/2})$ est équicontinue.*

Une autre propriété des opérateurs S et S_n , $n \in \mathbb{N}$ que l'on déduit de la décomposition spectrale est qu'ils sont autoadjoints dans le sens suivant :

$$\langle Su, v \rangle_{1/2, -1/2} = \langle u, Sv \rangle_{-1/2, 1/2} \quad \forall u \in H^{-1/2}, v \in H^{1/2}, \quad (1.100)$$

$$\langle S_n u, v \rangle_{1/2, -1/2} = \langle u, S_n v \rangle_{-1/2, 1/2} \quad \forall u \in H^{-1/2}, v \in H^{1/2}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.101)$$

Nous voulons maintenant montrer la convergence du schéma (1.50).

Dans un premier temps nous allons supposer que toutes les intégrales présentes dans le schéma (1.50) sont calculées exactement.

- **Estimation de l'erreur avec intégration exacte**

Soit $w_0 \in H^{1/2}$ donné et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite déterminée par le schéma (1.50), i.e

$$\begin{cases} \text{Pour } n \in \mathbb{N}, u_n \in V_n \text{ est tq} \\ a_n(u_n, v) = \langle v, Q_n w_0 \rangle_{-1/2, 1/2}, \quad \forall v \in V_n. \end{cases}$$

Nous voulons estimer la quantité $e_n = \|u - u_n\|_{-1/2}$, où $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ est la solution du problème (1.47) ou de (1.48) (indépendamment de n). En effet, on rappelle que $u(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x(s)) \|x'(s)\|$, où φ est la solution du problème (1.6) pour la donnée u_0 sur le bord :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et $x(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \Gamma)$ est une paramétrisation régulière de Γ .

On considère les résultats suivants (cf [22]) :

Lemme 1.13 (*inégalités inverses*)

$$\|w_n\|_s \leq \frac{C}{n^{t-s}} \|w_n\|_t, \quad \forall w_n \in V_n, \quad -1 \leq t \leq s \leq 0.$$

Lemme 1.14 Soit $\mathcal{P}_n$ l'opérateur de projection orthogonale de H^0 sur $\hat{V}_n$, on a

$$\|w - \mathcal{P}_n w\|_t \leq \frac{C}{n^{s-t}} \|w\|_s, \quad -1 \leq t \leq 0 \leq s \leq 1.$$

La convergence du schéma est donnée par le théorème suivant

Théorème 1.4 Supposons que la solution $u \in V$ de (1.47) est dans H^1 . Il existe alors une constante C telle que

$$\|u_n - u\|_{-1/2} \leq \frac{C}{n^{3/2}} \|u\|_1,$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in V_n$ est la solution de (1.50).

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in V_n$, on a $a_n(u_n, v) = a_n(u, v)$. Ceci implique que

$$a_n(u_n - \mathcal{P}_n u, v) = a_n(u - \mathcal{P}_n u, v) \quad \forall v \in V_n,$$

et en utilisant la remarque 1.12 et le théorème 1.3 on en déduit l'inégalité suivante :

$$C_1 \|u_n - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2}^2 \leq a_n(u - \mathcal{P}_n u, u_n - \mathcal{P}_n u) \leq C_2 \|u - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2} \|u_n - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2},$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{-1/2} &\leq \|u_n - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2} + \|u - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2} \leq \left(\frac{C_1}{C_2} + 1 \right) \|u - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2} \\ &\leq \frac{C}{n^{3/2}} \|u\|_1. \end{aligned}$$

■

1.3.4 Estimation de l'erreur avec prise en compte de l'intégration numérique.

Le théorème 1.4 nous montre que si on utilise le schéma (1.50) on peut espérer une convergence en $O(\frac{1}{n^{3/2}})$ lorsque n tend vers l'infini.

Cependant nous avons aussi remarqué que lorsque n tend vers l'infini, certaines intégrales du schéma deviennent de plus en plus “ressemblantes” à des intégrales singulières. L'emploi de l'intégration numérique doit donc être fait avec précaution.

Nous allons présenter une règle d'intégration numérique qui tient compte du problème que nous venons d'évoquer et qui permet de conserver une convergence optimale.

L'utilisation de l'intégration numérique revient à faire une nouvelle approximation. Au lieu de considérer le schéma (1.50), nous nous intéressons à une perturbation de ce schéma qui s'énonce de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } u_0 \in H^{1/2} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on cherche } \tilde{u}_n \in V_n \text{ tq} \\ \tilde{a}_n(\tilde{u}_n, v) = \tilde{b}_n(v) \quad \forall v \in V_n, \end{array} \right. \quad (1.102)$$

où $\tilde{a}_n : \tilde{H}^{-1/2} \times \tilde{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\tilde{b}_n : \tilde{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbb{R}$) est une perturbation de la forme bilinéaire a_n (resp. de la forme linéaire $b_n(v) = \langle v, Q_n u_0 \rangle_{-1/2, 1/2}$).

• Intégration numérique

Schématiquement, nous sommes confrontés au problème d'intégration suivant :

$$\text{évaluer } I_n(f_n) = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} f_n(x, y) dx dy, \quad (1.103)$$

où $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ est une suite d'intervalles définie pour $n \in \mathbb{N}$, avec

$\theta_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty[0, 1] \times [0, 1]$ est une suite de fonctions non uniformément bornées, i.e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^t}{\partial x^i \partial y^j} f_n(x, y) \right| = \infty, \quad \forall t \geq 1.$$

Pour résoudre ce problème d'intégration nous pouvons utiliser une formule d'intégration composite avec un sous raffinement des intervalles $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ (qui sont de longueur $\frac{1}{n}$). Ce sous raffinement doit être en relation avec le comportement asymptotique (lorsque n tend vers l'infini) de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (et de ses dérivées). En attendant de préciser ceci, nous présentons le principe de la méthode :

On découpe les intervalles $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ en m sous-intervalles de longueur

$\lambda = \frac{1}{m \cdot n}$. On pose $\theta_{i,k} = \theta_i + \lambda \cdot k$, $k \in 0..m$ et pour $k \in 1..m$, on considère la paramétrisation $\varphi_{i,k-1}$ du segment $[\theta_{i,k-1}, \theta_{i,k}]$ qui est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_{i,k-1} : [-1, 1] &\rightarrow [\theta_{i,k-1}, \theta_{i,k}], \\ \varphi_{i,k-1}(s) &= \frac{\lambda}{2} s + \frac{\theta_{i,k-1} + \theta_{i,k}}{2}. \end{aligned}$$

Nous définissons la formule d'intégration numérique $J_n(f_n) \approx I_n(f_n)$ par

$$J_n(f_n) = \frac{\lambda^2}{4} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^r w_p w_q f_n(\varphi_{i-1,k-1}(\xi_p), \varphi_{j-1,l-1}(\xi_q)), \quad (1.104)$$

où $(w_p, \xi_p)_{p=1}^r$ est la donnée des poids et des points d'une formule de quadrature sur $[-1, 1]$. Cette méthode utilise plusieurs paramètres, nous précisons maintenant leurs rôles pour le problème qui nous intéresse :

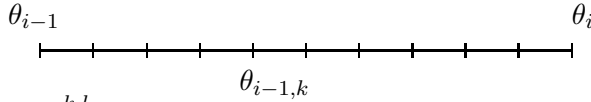
Lemme 1.15 Soit $(\alpha_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty[0, 1] \times [0, 1]$ une suite de fonctions vérifiant

$$\max_{\substack{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ i+j=q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial x^i \partial y^j} f_n(x, y) \right| \leq C.n^{\alpha_q}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.105)$$

Soit encore $\beta \geq 1$ un réel et p un entier positif. On considère la formule d'intégration donnée par la relation (1.104), avec $m = n^{\beta-1}$ et $(w_i, \xi_i)_{i=1}^r$ une formule de quadrature exacte sur $\mathbb{P}_p$. On a l'estimation

$$|I_n(f_n) - J_n(f_n)| = O\left(n^{-\beta(p+1)+\alpha_{p+1}-2}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (1.106)$$

Preuve. Le segment $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ est découpé en m intervalles de longueur $\lambda = \frac{1}{nm} = n^{-\beta}$.



On pose $g_n^{k,l}(s, t) = f_n(\varphi_{i-1,k-1}(s), \varphi_{j-1,l-1}(t))$, et on obtient

$$I_n(f_n) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{\theta_{i-1,k-1}}^{\theta_{i-1,k}} \int_{\theta_{j-1,l-1}}^{\theta_{j-1,l}} f_n(x, y) dx dy = \frac{\lambda^2}{4} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_n^{k,l}(s, t) ds dt.$$

Comme $(w_i, \xi_i)_{i=1}^r$ est une formule de quadrature exacte sur $\mathbb{P}_p$, en effectuant un développement limité de $g_n^{k,l}(s, t)$ autour de $(0, 0)$, on montre que

$$\left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_n^{k,l}(s, t) ds dt - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j g_n^{k,l}(\xi_i, \xi_j) \right| \leq C.\lambda^{p-1} \max_{u+v=p+1} \int_{\theta_{i-1,k-1}}^{\theta_{i-1,k}} \int_{\theta_{j-1,l-1}}^{\theta_{j-1,l}} \left| \frac{\partial^{p+1}}{\partial x^u \partial y^v} f_n(x, y) \right| dx dy \leq C.n^{-\beta(p+1)+\alpha_{p+1}},$$

ce qui implique que

$$|I_n(f_n) - J_n(f_n)| = O\left(n^{-\beta(p+1)+\alpha_{p+1}-2}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

■

Définition 1.5 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty[0, 1] \times [0, 1]$ une suite de fonctions qui vérifie la relation (1.105) pour une certaine suite entière $(\alpha_q)_{q \in \mathbb{N}}$. Soit encore $\beta \geq 1$ un réel et r un entier positif.

On notera $J_n^{\beta,r}(f_n)$ la formule d'intégration donnée par la relation (1.104), où on a choisi un sous raffinement caractérisé par $m = n^{\beta-1}$ et une formule de quadrature de Gauss à r points $(w_i, \xi_i)_{i=1}^r$.

Dans la suite, nous utiliserons uniquement des formules d'intégrations du type $J_n^{\beta,r}(f_n)$ que nous venons d'introduire dans la définition 1.5.

Remarquons qu'une formule de Gauss à r points est exacte sur $\mathbb{P}_{2r-1}$. Ainsi la formule d'erreur (1.106) devient :

$$|I_n(f_n) - J_n^{\beta,r}(f_n)| = O\left(n^{-2\beta r + \alpha_{2r-2}}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (1.107)$$

Pour illustrer le lemme 1.15 et plus particulièrement l'estimation (1.107), considérons l'exemple suivant :

soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty[0, 1]$ la suite de fonction donnée par $f_n(x) = \log(x + 1/n)$.

On désire évaluer numériquement la grandeur $I_n(f_n) = \int_0^h f_n(x) dx$ avec $h = 1/n$, grandeur qui par ailleurs peut-être calculée explicitement.

Nous appliquons la formule $J_n^{r,\beta}(f_n) \approx I_n(f_n)$, pour diverses valeurs de r et de β , et en tenant compte du fait qu'on n'intègre ici que dans une dimension d'espace. En particulier, on vérifie que pour une intégration simple la formule (1.107) devient

$$|I_n(f_n) - J_n^{\beta,r}(f_n)| = O\left(n^{-2\beta r + \alpha_{2r-1}}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (1.108)$$

Pour cet exemple, nous avons $\alpha_q = q$. Ainsi, nous voulons vérifier numériquement la relation

$$|I_n(f_n) - J_n^{\beta,r}(f_n)| = O\left(n^{-\gamma}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (1.109)$$

avec $\gamma = 2r(\beta - 1) + 1$.

Dans les figures 1.5 et 1.6, on a reporté $-\log |I_n(f_n) - J_n^{r,\beta}(f_n)|$ en fonction de $-\log(h)$. Dans la figure 1.5, où on a choisit $(r, \beta) = (1, 2)$ et $(2, 1.5)$, on constate bien que l'erreur est d'ordre 3 ($\gamma = 3$). Dans la figure 1.6, où on a choisit $(r, \beta) = (2, 2)$ et $(3, 1.67)$, on obtient effectivement une erreur d'ordre 5.

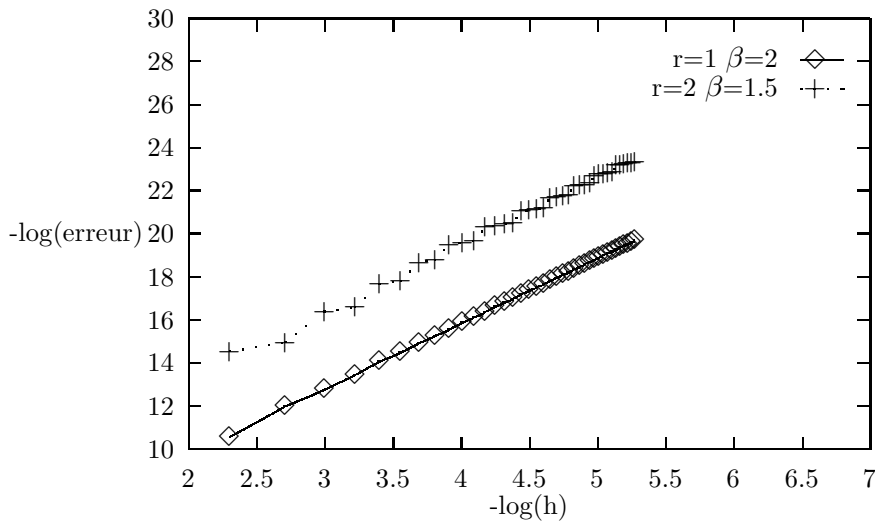


FIG. 1.5 – Formules d'ordre 3.

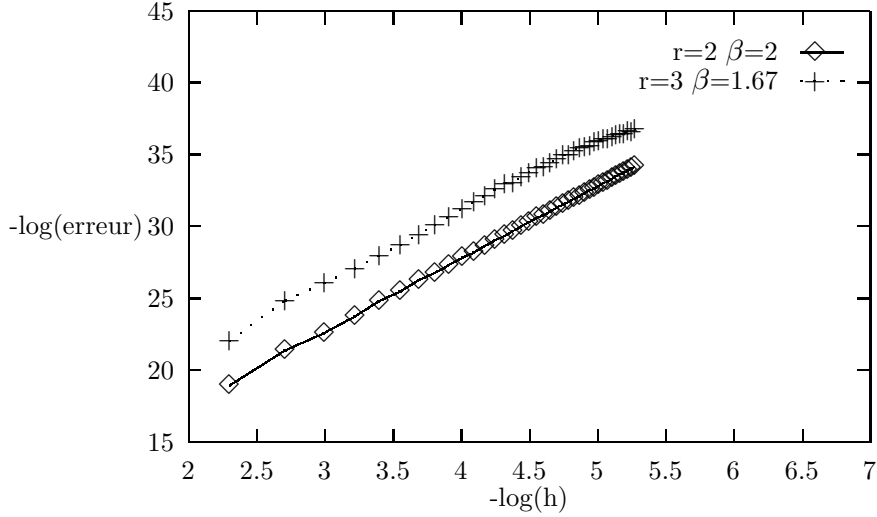


FIG. 1.6 – Formules d'ordre 5.

• **Estimation de l'erreur pour le schéma perturbé (1.102)**

Nous commençons par mesurer les perturbations entre les formes a_n et $\tilde{a}_n$ et entre b_n et $\tilde{b}_n$.

On choisit ici (cf remarque 1.8) la base $\hat{\beta}_n = \{\eta_1, \dots, \eta_{n+1}\}$ pour l'espace $\hat{V}_n$, où les fonctions η_j , $j = 1, \dots, n+1$ sont 1-périodiques, et leurs restrictions sur $[-1, 1]$ sont données par

$$\eta_j = 1_{[\theta_{j-1}, \theta_j]}, \quad \theta_i = \frac{i}{n+1}.$$

Une base de β_n de V_n est alors obtenue par

$$\beta_n = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}, \text{ avec } \chi_i = \eta_i - \eta_{i+1}.$$

Soit $q_n, p_n \in V_n$, on a

$$q_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i \eta_i, \quad p_n = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \chi_i = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\mu}_i \eta_i.$$

Les réels $\hat{\lambda}_i, \hat{\mu}_i$, $i = 1, \dots, n+1$ vérifient

$$\hat{\lambda}_i = q_n(\theta_{i-\frac{1}{2}}), \quad \hat{\mu}_i = p_n(\theta_{i-\frac{1}{2}}),$$

où on a posé $\theta_{i-\frac{1}{2}} = \frac{i-1/2}{n+1}$.

Ainsi on obtient $a_n(p_n, q_n) = \sum_{i,j=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i \hat{\mu}_j c_{i,j}^n$, où on a posé

$$c_{i,j}^n = \langle S_n \eta_j, \eta_i \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \log(c^2 + c_n^2 - 2c.c_n \cos(2\pi(s-t))) dt ds. \quad (1.110)$$

Nous supposons ici que la donnée w_0 est régulière. Nous avons

$b_n(q_n) = \langle q_n, Q_n w_0 \rangle_{-1/2, 1/2} = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\mu}_i d_i^n$, où on a posé

$$d_i^n = \langle \eta_i, Q_n w_0 \rangle_{-1/2, 1/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_0^1 \frac{c - c_n \cos(2\pi(t-s))}{c^2 - 2c.c_n \cos(2\pi(t-s)) + c_n^2} w_0(t) dt ds. \quad (1.111)$$

On décompose encore l'expression (1.111) en posant $d_i^n = \sum_{j=1}^{n+1} d_{i,j}^n$ avec

$$d_{i,j}^n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{c - c_n \cos(2\pi(t-s))}{c^2 - 2c.c_n \cos(2\pi(t-s)) + c_n^2} w_0(t) dt ds. \quad (1.112)$$

Posons maintenant

$$f_n(s, t) = -\frac{1}{4\pi} \log(c^2 + c_n^2 - 2c.c_n \cos(2\pi(s-t))), \quad (1.113)$$

$$g_n(s, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{c - c_n \cos(2\pi(t-s))}{c^2 - 2c.c_n \cos(2\pi(t-s)) + c_n^2} w_0(t). \quad (1.114)$$

En conservant la notation introduite en (1.103), nous voyons que nous sommes amené à évaluer les grandeurs $c_{i,j}^n = I_n(f_n)$ et $d_{i,j}^n = I_n(g_n)$. Nous allons maintenant montrer en plusieurs étapes, que si nous remplaçons les coefficients $c_{i,j}^n$ et $d_{i,j}^n$ par leurs approximations $\tilde{c}_{i,j}^n$ et $\tilde{d}_{i,j}^n$ définis par

$$\tilde{c}_{i,j}^n = J_n^{\beta_1, r_1}(f_n), \quad 2\beta_1 r_1 - 2r_1 = 2, \quad (1.115)$$

$$\tilde{d}_{i,j}^n = J_n^{\beta_2, r_2}(g_n), \quad 2\beta_2 r_2 - 2r_2 = 3, \quad (1.116)$$

alors le schéma perturbé (1.102) est bien posé et est aussi efficace que le schéma (1.50) où les intégrales sont supposées être calculées exactement.

Précisons aussi que nous supposons ici que les courbes auxiliaires sont obtenues avec la formule (1.3). Ceci assure bien que l'on obtient des cercles concentriques et en plus on a $c_n - c = O(1/n)$, dans le sens où il existe deux réels strictement positifs w_1 et w_2 , tels que

$$\frac{w_1}{n} \leq |c_n - c| \leq \frac{w_2}{n}. \quad (1.117)$$

Théorème 1.5

En utilisant les formules (1.115) et (1.116) pour le calcul des termes intégraux, on a

i)

$$|c_{i,j}^n - \tilde{c}_{i,j}^n| = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{ et } |d_{i,j}^n - \tilde{d}_{i,j}^n| = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

ii) Il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p_n, q_n \in V_n$ on ait

$$|a_n(p_n, q_n) - \tilde{a}_n(p_n, q_n)| \leq \frac{C}{n^2} \|q_n\|_{L^2} \|p_n\|_{L^2},$$

$$|b_n(p_n) - \tilde{b}_n(p_n)| \leq \frac{C}{n^2} \|p_n\|_{L^2}.$$

Preuve.

On vérifie que les suites

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty[0, 1]^2$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty[0, 1]^2$, données par les relations (1.113) et (1.114) satisfont

$$\max_{\substack{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ i+j=q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial x^i \partial y^j} f_n(x, y) \right| \leq C.n^q, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\max_{\substack{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ i+j=q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial x^i \partial y^j} g_n(x, y) \right| \leq C.n^{q+1}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$$

où C est une constante.

On peut appliquer la formule (1.106), et on montre le premier résultat annoncé, à savoir

$$\begin{aligned} |c_{i,j}^n - \tilde{c}_{i,j}^n| &= O(n^{2r_1-2, \beta_1 r_1-2}) = O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \\ |d_{i,j}^n - \tilde{d}_{i,j}^n| &= O(n^{2r_2+1-2, \beta_2 r_2-2}) = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p_n, q_n \in V_n$, on a

$$a_n(p_n, q_n) = \sum_{i,j=1}^{n+1} q_n(x_i) p_n(x_j) a_{i,j}^n, \text{ et } \tilde{a}_n(p_n, q_n) = \sum_{i,j=1}^{n+1} q_n(\theta_{i-1/2}) p_n(\theta_{j-1/2}) \tilde{c}_{i,j}^n.$$

Ceci permet d'obtenir la majoration

$$|a_n(p_n, q_n) - \tilde{a}_n(p_n, q_n)| \leq \sum_{i,j}^{n+1} |q_n(\theta_{i-1/2}) p_n(\theta_{j-1/2})| |c_{i,j}^n - \tilde{c}_{i,j}^n|,$$

et en utilisant le premier point du théorème on obtient

$$\begin{aligned} |a_n(p_n, q_n) - \tilde{a}_n(p_n, q_n)| &\leq \frac{C}{n^4} \sum_{i,j=1}^{n+1} |q_n(\theta_{i-1/2}) p_n(\theta_{j-1/2})| = \frac{C}{n^4} \sum_{i=1}^{n+1} |q_n(\theta_{i-1/2})| \sum_{j=1}^{n+1} |p_n(\theta_{j-1/2})| \\ &\leq \frac{C}{n^2} \|q_n\|_{L^2} \|p_n\|_{L^2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

De la même manière on montre que

$$|b_n(q_n) - \tilde{b}_n(q_n)| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |q_n(\theta_{i-1/2})| \sum_{j=1}^{n+1} |d_{i,j}^n - \tilde{d}_{i,j}^n| \leq \frac{C}{n^2} \|q_n\|_{L^2}.$$

■

Remarque 1.13

• Ce théorème s'adapte facilement au cas plus général où Γ est une courbe suffisamment régulière et $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de courbes (aussi suffisamment régulières) et telle que $d(\Gamma, \tilde{\Gamma}_n) = O(\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers l'infini (dans le sens ici où $n.d(\Gamma, \Gamma_n)$ est majorée et minorée).

• Les paramètres d'intégration $\beta_1, r_1, \beta_2, r_2$, ne sont pas univoquement déterminés par les relations (1.115) et (1.116). On aura intérêt à choisir β_1 et β_2 assez petits, en effet on vérifie par exemple que le calcul d'un terme $\tilde{a}_{i,j}^n$ avec la formule $J_n^{\beta_1, r_1}$, nécessite un total de $n_o = n^{2(\beta_1-1)} \cdot r_1^2$ opérations.

• Il est clair que la formule d'intégration doit-être affinée car si la quantité $|i - j|$ est suffisamment grande alors les termes $c_{i,j}^n$ ne deviennent jamais singuliers (dans le sens où, lorsque n tend vers l'infini, les intégrands tendent vers des fonctions régulières).

Une conséquence du théorème 1.5 est que la famille de formes bilinéaires $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété de coercivité discrète (1.74), au moins à partir d'un certain rang :

Lemme 1.16 *Le problème approché (1.102) est coercif dans l'espace V_n si n est assez grand.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p_n \in V_n$, on déduit du théorème 1.5 et du lemme 1.13 que

$$\tilde{a}_n(p_n, p_n) \geq a_n(p_n, p_n) - \frac{C}{n^2} \|p_n\|_{L^2}^2 \geq \gamma \|p_n\|_{-1/2}^2 - \frac{C'}{n^3} \|p_n\|_{-1/2}^2,$$

où γ est une constante donnée par le théorème 1.3.

Ainsi, il existe $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\tilde{a}_n(p_n, p_n) \geq \delta \|p_n\|_{-1/2}^2, \quad \forall n \geq n_0.$$

■

Finalement nous pouvons énoncer le résultat de convergence :

Théorème 1.6 *Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le problème (1.102) admet une unique solution $\tilde{u}_n \in V_n$.*

D'autre part soit $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ l'unique solution du problème (1.48), si elle vérifie $u \in H^1$, on a l'estimation

$$\|u - \tilde{u}_n\|_{-1/2} \leq \frac{C}{n^{3/2}} \|u\|_1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Preuve.

- Pour n assez grand, l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.102) est une conséquence du lemme 1.16.
- Pour n assez grand, nous avons

$$\tilde{a}_n(\tilde{u}_n - v_n, \tilde{u}_n - v_n) \geq \delta \|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2}^2, \quad \forall v_n \in V_n, \quad (1.118)$$

où δ est une constante strictement positive donnée par le lemme 1.16.

Soit $v_n \in V_n$, un calcul simple donne

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(\tilde{u}_n - v_n, \tilde{u}_n - v_n) &= \tilde{a}_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - v_n) - a_n(u, \tilde{u}_n - v_n) + a_n(u - v_n, \tilde{u}_n - v_n) + \\ &\quad a_n(v_n, \tilde{u}_n - v_n) - \tilde{a}_n(v_n, \tilde{u}_n - v_n) \\ &= \tilde{b}_n(\tilde{u}_n - v_n) - b_n(\tilde{u}_n - v_n) + \\ &\quad a_n(u - v_n, \tilde{u}_n - v_n) + a_n(v_n, \tilde{u}_n - v_n) - \tilde{a}_n(v_n, \tilde{u}_n - v_n). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.118), le théorème 1.5 et le lemme 1.13, on montre que

$$\begin{aligned} \delta \|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2}^2 &\leq \frac{C}{n^2} \|\tilde{u}_n - v_n\|_{L^2}^2 + C_1 \|u - v_n\|_{-1/2} \|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2} + \\ &\quad \frac{C}{n^2} \|v_n\|_{L^2} \|\tilde{u}_n - v_n\|_{L^2} \\ &\leq \frac{C}{n^{3/2}} (\|v_n\|_{L^2} + 1) \|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2} + C_1 \|u - v_n\|_{-1/2} \|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2} \leq \frac{C'}{n^{3/2}} (\|v_n\|_{L^2} + 1) + C'_1 \|u - v_n\|_{-1/2}, \quad \forall n \geq n_0, \forall v_n \in V_n. \quad (1.119)$$

En prenant $v_n = \mathcal{P}_n u$, la relation (1.119) devient

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n - v_n\|_{-1/2} &\leq \frac{C'}{n^{3/2}} (\|\mathcal{P}_n u\|_{L^2} + 1) + C'_1 \|u - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2} \\ &\leq \frac{C''}{n^{3/2}} (\|u\|_{L^2} + 1) + \frac{C''_1}{n^{3/2}} \|u\|_1, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant du lemme 1.14.

Finalement on obtient

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{-1/2} \leq \|\tilde{u}_n - \mathcal{P}_n u\|_{-1/2} + \|\mathcal{P}_n u - u\|_{-1/2} \leq \frac{K}{n^{3/2}} (\|u\|_{L^2} + 1 + \|u\|_1),$$

où K est une constante indépendante de u et de n . ■

1.4 Généralisation aux domaines avec frontières régulières.

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré des domaines Ω qui étaient des disques. Dans ce cas particulier, nous avons pu analyser le schéma (1.50) grâce à une décomposition spectrale de l'opérateur S_n , $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas général, on ne sait pas déterminer la décomposition spectrale. Et même si on le savait l'étude ne serait pas aussi simple que dans le cas circulaire, car les vecteurs propres ne sont plus les fonctions trigonométriques v_k , $k \in \mathbb{Z}$. Cependant, nous allons remarquer que dans le cas général l'opérateur S_n est une perturbation "régulière" de l'opérateur S_n correspondant au cas circulaire. A partir de maintenant nous noterons par D_n et D , les opérateurs S_n et S décrits dans le cas circulaire. On rappelle les décompositions (1.51) et (1.56) :

$$S = D + K, \quad (1.120)$$

$$S_n = D_n + K_n, \quad (1.121)$$

avec

$$D(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \|\nu(s) - \nu(t)\| dt, \quad (1.122)$$

$$D_n(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \|\nu_n(s) - \nu(t)\| dt, \quad (1.123)$$

$$K(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \frac{\|x(s) - x(t)\|}{\|\nu(s) - \nu(t)\|} dt, \quad (1.124)$$

$$K_n(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(t) \log \frac{\|x_n(s) - x(t)\|}{\|\nu_n(s) - \nu(t)\|} dt, \quad (1.125)$$

où

$$\nu(t) = (c \cos(2\pi t), c \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1], \quad (1.126)$$

$$\nu_n(t) = (c_n \cos(2\pi t), c_n \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.127)$$

Nous rappelons aussi que x est une paramétrisation régulière de $\Gamma = \partial\Omega$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De même x_n est une paramétrisation régulière de la courbe auxiliaire $\tilde{\Gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ces courbes auxiliaires sont construites à partir de Γ par la relation (1.3). Ceci assure que l'on ait $\text{dist}(\Gamma, \tilde{\Gamma}_n) = O(1/n)$ lorsque n tend vers l'infini. On remarquera que lorsque Γ est un cercle de rayon c centré en 0 (c.f (1.126)), alors les courbes auxiliaires $\tilde{\Gamma}_n$, $n \in \mathbb{N}$ construites avec la relation (1.3) sont des cercles centrés en 0 et de rayon c_n (c.f (1.127)).

Nous avons montré (cf lemme 1.12) que la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$ converge ponctuellement vers $D \in \mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$.

La perturbation "régulière" dont nous parlons se traduit elle par le fait que la suite d'opérateurs $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(H^{-1/2}, H^{1/2})$ converge (au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})}$) vers l'opérateur $K \in \mathcal{K}(H^{-1/2}, H^{1/2})$.

1.4.1 Convergence de K_n vers K dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$

En fait, pour simplifier une démonstration nous ne construirons pas les courbes auxiliaires avec la relation (1.3) mais avec la relation suivante

$$\tilde{\Gamma}_n = \left\{ x_n(t) \in \mathbb{R}^2 : x_n(t) = x(t) + \|x'(t)\| \frac{\lambda}{n} \zeta(t), t \in [0, 1] \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.128)$$

où $\zeta(t)$ est la normale extérieur à Γ , au point $x(t)$.

Cette modification ne change en rien la distance asymptotique entre Γ et $\tilde{\Gamma}_n$ et elle transforme aussi le cercle donné par la paramétrisation $x = \nu$ (cf (1.126)) en cercles concentriques donnés par $x_n = \nu_n$ (cf (1.127)). En pratique, il n'y a aussi aucun désavantage à utiliser la relation (1.128) qui est aussi simple que (1.3).

Le paramètre $\lambda > 0$ qui intervient dans les deux formules (1.3) et (1.128) peut avoir un intérêt en pratique mais il n'est d'aucune importance pour l'étude théorique et nous supposons $\lambda = 1$ pour simplifier.

On note par k et k_n les noyaux des opérateurs K et K_n :

$$k, k_n : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.129)$$

$$k(s, t) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\|x(s) - x(t)\|}{\|\nu(s) - \nu(t)\|}, \quad (1.130)$$

$$k_n(s, t) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\|x_n(s) - x(t)\|}{\|\nu_n(s) - \nu(t)\|}. \quad (1.131)$$

Ces noyaux sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette constatation est évidente pour

k_n , $n \in \mathbb{N}$. Pour k et ses dérivées il suffit de vérifier seulement pour la variable $s \in [0, 1]$ que les points (s, s) ne sont que des singularités apparentes.

On a la propriété de convergence suivante :

Lemme 1.17 *La suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie en (1.131) converge au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1[0,1]^2}$ vers la fonction k définie en (1.130),*

$$i.e \lim_{n \rightarrow \infty} \|k_n - k\|_{H^1[0,1]^2} = 0. \quad (1.132)$$

Preuve. On pose

$$\varphi_n(s, t) = |k_n(s, t) - k(s, t)|^2, \quad (1.133)$$

$$\psi_n(s, t) = \left| \frac{\partial k_n}{\partial s}(s, t) - \frac{\partial k}{\partial s}(s, t) \right|^2, \quad (1.134)$$

$$\theta_n(s, t) = \left| \frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) - \frac{\partial k}{\partial t}(s, t) \right|^2, \quad (1.135)$$

et on vérifie sans peine que ces trois fonctions convergent ponctuellement vers 0 partout sauf éventuellement sur l'ensemble

$\mathcal{N} = \{(s, t) \in [0, 1]^2, s = t, \text{ ou } |s - t| = 1\}$. De plus cet ensemble est négligeable par rapport à $[0, 1]^2$ pour la mesure $dsdt$.

Un calcul immédiat donne

$$-2\pi \frac{\partial k_n}{\partial s}(s, t) = \frac{(x'_n(s), x_n(s) - x(t))}{\|x_n(s) - x(t)\|^2} - \frac{(\nu'_n(s), \nu_n(s) - \nu(t))}{\|\nu_n(s) - \nu(t)\|^2}, \quad (1.136)$$

$$-2\pi \frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) = -\frac{(x'(t), x_n(s) - x(t))}{\|x_n(s) - x(t)\|^2} + \frac{(\nu'(t), \nu_n(s) - \nu(t))}{\|\nu_n(s) - \nu(t)\|^2}. \quad (1.137)$$

Nous voulons montrer que les suites de fonctions $(\frac{\partial k_n}{\partial s})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\frac{\partial k_n}{\partial t})_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément bornées en n . C'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de n , telle que

$$\left| \frac{\partial k_n}{\partial s}(s, t) \right| \leq C, \quad \forall (s, t) \in [0, 1]^2, \quad (1.138)$$

$$\left| \frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right| \leq C, \quad \forall (s, t) \in [0, 1]^2. \quad (1.139)$$

Soit $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$, on définit l'ensemble $I_\varepsilon \subset [0, 1]^2$ par

$$I_\varepsilon = \{(s, t) \in [0, 1]^2, \varepsilon \leq |s - t| \leq 1 - \varepsilon\}.$$

Il suffit alors d'utiliser des majorations grossières pour montrer que pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ on a

$$\left| \frac{\partial k_n}{\partial s}(s, t) \right| \leq M_\varepsilon, \quad \forall (s, t) \in I_\varepsilon, \quad (1.140)$$

$$\left| \frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right| \leq M_\varepsilon, \quad \forall (s, t) \in I_\varepsilon, \quad (1.141)$$

où $M_\varepsilon < \infty$, $\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{4}]$ mais où la limite de M_ε quand ε tend vers 0, n'est pas nécessairement bornée. Ceci signifie que les relations (1.138) et (1.139) sont vraies, à condition de montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial k_n}{\partial s}(s_n, t_n) \right| \leq C_1, \quad (1.142)$$

$$\left| \frac{\partial k_n}{\partial t}(s_n, t_n) \right| \leq C_1, \quad (1.143)$$

pour toute suite $(s_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^2$ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - t_n| = 0, \quad (1.144)$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - t_n| = 1. \quad (1.145)$$

En fait, il suffit de considérer le cas (1.144) qui est le plus délicat.

- Montrons que la relation (1.142) est vraie.

Soit $(s_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^2$ une suite vérifiant (1.144). On note par $\zeta_1(t)$, la normale à Γ au point $x(t)$ et par $\zeta_2(t)$, la normale au cercle au point $\nu(t)$.

On a par définition $x_n(s_n) = x(s_n) + \frac{\|x'(s_n)\|}{n} \zeta_1(s_n)$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} x_n(s_n) - x(t_n) &= -x'(s_n)(s_n - t_n) + \frac{\|x'(s_n)\|}{n} \zeta_1(s_n) + \mathcal{O}(s_n - t_n)^2, \\ x'_n(s_n) &= x'(s_n) + \frac{1}{n} \left(\frac{(x'(s_n), x''(s_n))}{\|x'(s_n)\|} \zeta_1(s_n) + \|x'(s_n)\| \zeta'_1(s_n) \right), \\ \|x_n(s_n) - x(t_n)\|^2 &= \|x'(s_n)\|^2 (s_n - t_n)^2 + \frac{\|x'(s_n)\|^2}{n^2} + \frac{\mathcal{O}(s_n - t_n)^2}{n} + \mathcal{O}(s_n - t_n)^3 \\ &= \|x'(s_n)\|^2 \left((s_n - t_n)^2 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} + \mathcal{O}(s_n - t_n) \right), \\ (x'_n(s_n), x_n(s_n) - x(t_n)) &= -\|x'(s_n)\| (s_n - t_n) + \mathcal{O}(s_n - t_n)^2 + \frac{\mathcal{O}(1)}{n^2} + \frac{\mathcal{O}(s_n - t_n)}{n}. \end{aligned}$$

On a les mêmes estimations en considérant ν à la place de x , et donc

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial k_n}{\partial s}(s_n, t_n) &= \frac{1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} + \mathcal{O}(s_n - t_n)}{(s_n - t_n)^2 + \frac{1}{n^2}} \left(-(s_n - t_n) + (s_n - t_n) + \right. \\ &\quad \left. \mathcal{O}(s_n - t_n)^2 + \frac{\mathcal{O}(1)}{n^2} + \frac{\mathcal{O}(s_n - t_n)}{n} \right) \\ &= \frac{n^2 \mathcal{O}(s_n - t_n)^2 + \mathcal{O}(1) + n \mathcal{O}(s_n - t_n)}{n^2 (s_n - t_n)^2 + 1} \leq C_1 < \infty. \end{aligned}$$

• De la même manière, on montre que la relation (1.143) est vraie.

Avec les mêmes notations on a :

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial k_n}{\partial t}(s_n, t_n) &= -\frac{(x'(t_n), x_n(s_n) - x(t_n))}{\|x_n(s_n) - x(t_n)\|^2} + \frac{(\nu'(t_n), \nu_n(s_n) - \nu(t_n))}{\|\nu_n(s_n) - \nu(t_n)\|^2} \\ &= \frac{n^2 \mathcal{O}(s_n - t_n)^2 + n \mathcal{O}(s_n - t_n)}{n^2 (s_n - t_n)^2 + 1} \leq C_1 < \infty. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons montré que les relations (1.138) et (1.139) sont vraies. Posons maintenant

$$C_2 = \max \left\{ \max_{(s,t) \in [0,1]^2} \left| \frac{\partial k}{\partial s}(s, t) \right|, \max_{(s,t) \in [0,1]^2} \left| \frac{\partial k}{\partial t}(s, t) \right| \right\},$$

on constate ainsi que la constante $(C + C_2)^2$ est une fonction qui majore les suites de fonctions ψ_n et θ_n définies en (1.134) et (1.135). Il en résulte par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^2} \psi_n(s, t) ds dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^2} \theta_n(s, t) ds dt = 0. \quad (1.146)$$

Remarquons enfin que la suite de fonction $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie en (1.133) converge partout vers la fonction 0. En effet, si $s \in [0, 1]$, on a

$$k_n(s, s) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\frac{1}{n} \|x'(s)\|}{\frac{1}{n} \|\nu'(s)\|} = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\|x'(s)\|}{\|\nu'(s)\|} = k(s, s).$$

Comme les majorations (1.138) et (1.138) impliquent que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue, on conclut que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]^2$. Cela implique en particulier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^2} \varphi_n(s, t) ds dt = 0. \quad (1.147)$$

Finalement les relations (1.146) et (1.147) traduisent exactement la propriété (1.132). ■

La convergence en norme des noyaux entraîne la convergence en norme des opérateurs, on a le

Théorème 1.7 *La suite d'opérateurs $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(H^{-1/2}, H^{1/2})$ converge vers l'opérateur K dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$,*

$$i.e \lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n - K\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} = 0. \quad (1.148)$$

Preuve. On pose

$$\alpha_n = \|K_n - K\|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H^0)}, \quad (1.149)$$

$$\beta_n = \|K_n - K\|_{\mathcal{L}(H^0, H^1)}. \quad (1.150)$$

On a alors

$$\|K_n - K\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} \leq \sqrt{\alpha_n \beta_n}. \quad (1.151)$$

Cette inégalité étant une conséquence des inégalités d'interpolation entre les espaces de Sobolev H^s (c.f [18] pages 115-117). Nous remarquons donc que pour vérifier que la relation (1.148) est vraie, il suffit de montrer que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0. \quad (1.152)$$

On rappelle la propriété (1.10) :

$$|< u, v >_{-t, t}| \leq \|u\|_{-t} \|v\|_t \quad \forall u \in H^{-t}, \forall v \in H^t. \quad (1.153)$$

Ainsi si $u \in H^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} |(K_n - K)u(x)|^2 &\leq \|u\|_{-1}^2 \left(\int_0^1 |k_n(x, y) - k(x, y)|^2 dy + \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 \left| \frac{\partial k_n}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial k}{\partial y}(x, y) \right|^2 dy \right), \quad \forall x \in [0, 1], \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\alpha_n^2 \leq \|k_n - k\|_{H^1[0,1]}^2. \quad (1.154)$$

• Considérons maintenant $u \in H^0$, en utilisant à nouveau l'inégalité (1.153) on montre que

$$\begin{aligned} |(K_n - K)u(x)|^2 &\leq \|u\|_0^2 \int_0^1 |k_n(x, y) - k(x, y)|^2 dy, \quad \forall x \in [0, 1], \\ \left| \frac{d}{dx}(K_n - K)u(x) \right|^2 &= \left| \left(\frac{\partial k_n}{\partial x}(x, \cdot) - \frac{\partial k}{\partial x}(x, \cdot), u(\cdot) \right)_0 \right|^2 \\ &\leq \|u\|_0^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial k_n}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial k}{\partial x}(x, y) \right|^2 dy, \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\beta_n^2 \leq \|k_n - k\|_{H^1[0,1]}^2. \quad (1.155)$$

Enfin grâce au lemme 1.17, on vérifie que les relations (1.154) et (1.155) impliquent que (1.152) est vraie. Ce qui termine la preuve. ■

Un conséquence immédiate est donnée ci-dessous :

Corollaire 1.2

La suite d'opérateurs $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers S dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$,

$$i.e \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u) - S(u)\|_{1/2} = 0, \quad \forall u \in H^{-1/2}.$$

Preuve. On considère les décompositions (1.120) et (1.121), et on utilise le théorème 1.7 et le lemme 1.12. ■

Dans le paragraphe qui suit, nous allons rappeler brièvement quel est le schéma numérique que nous étudions ici.

1.4.2 Schéma numérique

Dans le paragraphe 1.3.2 nous avons défini une suite emboîtée $(\hat{V}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^{-1/2}$ d'espaces discrets de dimension $n + 1$. On rappelle que

$$\hat{V}_n = \{u \in H^0, u|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_0, i \in 0..n\},$$

avec $x_i = \frac{i}{n+1}$.

Ensuite nous avons défini la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{H}^{-1/2}$, $\dim(V_n) = n$, par

$$V_n = \left\{ u \in \hat{V}_n, \int_0^1 v(x) dx = 0 \right\}.$$

Dans le lemme 1.14, nous avons introduit l'opérateur $\mathcal{P}_n$ qui est le projecteur orthogonal de H^0 sur $\hat{V}_n$. Il peut-être défini explicitement par

$$(\mathcal{P}_n v)|_{[x_i, x_{i+1}]} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x) dx, \quad i \in 0, \dots, n.$$

On constate par conséquent que $\mathcal{P}_n$ restreint à $\tilde{H}^0$ est un projecteur orthogonal sur V_n .

Ce type de projecteurs correspond à un cas particulier de ceux considérés par exemple dans [30] ou [22]. On rappelle les lemmes 1.13 et 1.14, à savoir qu'il existe une constante C strictement positive, telle que

$$\|u - \mathcal{P}_n u\|_t \leq \frac{C}{n^{s-t}} \|u\|_s, \quad -1 \leq t \leq 0 \leq s \leq 1, \quad (1.156)$$

$$\|u\|_s \leq \frac{C}{n^{t-s}} \|u\|_t, \quad \forall u \in \hat{V}_n, \quad -1 \leq t \leq s \leq 0. \quad (1.157)$$

Remarquons que pour tout $u \in \tilde{H}^{-1/2}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2} = 0. \quad (1.158)$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$. L'injection $\tilde{L}^2 \subset \tilde{H}^{-1/2}$ étant dense, il existe $w \in \tilde{L}^2$ tel que $\|u - w\|_{-1/2} \leq \varepsilon$. On pose $\chi_n = \mathcal{P}_n(w)$. On a alors $\chi_n \in V_n$ et en utilisant l'estimation (1.156), on vérifie que

$$\min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2} \leq \|u - w\|_{-1/2} + \|w - \chi_n\|_{-1/2} \leq \varepsilon + \frac{C}{\sqrt{n}} \|w\|_0.$$

On conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2} \leq \varepsilon$. Mais $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a prouvé que la relation (1.158) est vraie.

Nous considérons ici le schéma (1.50), dont nous rappelons la formulation :

$$\begin{cases} \text{Pour } u_0 \in H^{1/2} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on cherche } u_n \in V_n \text{ tq} \\ a_n(u_n, v) \stackrel{\text{def}}{=} \langle S_n u_n, v \rangle_{1/2, -1/2} = \langle Q_n u_0, v \rangle_{1/2, -1/2}, \quad \forall v \in V_n. \end{cases} \quad (1.159)$$

Remarquons que toutes les grandeurs $u_n, v, S_n u_n, Q_n u_0$ intervenant dans la formulation (1.159) appartiennent à L^2 . Ainsi les crochets de dualité

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, -1/2}$ correspondent ici exactement au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_0$ de L^2 .

Nous voulons maintenant montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in V_n$, solution de (1.159). De plus nous voulons estimer l'erreur, entre u_n et la solution exacte $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ (indépendante de n) et qui vérifie :

$$a_n(u, v) = \langle Q_n u_0, v \rangle_{1/2, -1/2}, \quad \forall v \in \tilde{H}^{-1/2}. \quad (1.160)$$

1.4.3 Existence et unicité de la solution numérique. Estimation de l'erreur.

Nous commençons par rappeler la définition et quelques propriétés de la **convergence faible**. Pour plus de détail, le lecteur pourra consulter [2] chap. III.

Définition 1.6 Soit $s \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^s$. On dit que u_n converge faiblement vers $u \in H^s$ et on note $u_n \rightharpoonup u$, si pour tout $v \in H^{-s}$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v \rangle_{s, -s} = \langle u, v \rangle_{s, -s}.$$

Dans le lemme qui suit, on donne sans les démontrer quelques propriétés utiles :

Lemme 1.18

Soit $s \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^s$ et $u \in H^s$

i) On a l'équivalence suivante :

- $u_n \rightharpoonup u$ et $\|u_n\|_s \rightarrow \|u\|_s \Leftrightarrow u_n \rightarrow u$.
- ii) $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_s < \infty$ et $\|u\|_s \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_s$.
- iii) $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle_{s, -s} = \langle u, v \rangle_{s, -s}$,
pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^{-s}$ telle que $v_n \rightarrow v \in H^{-s}$.
- iv) Soit $r \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{L}(H^s, H^r)$, alors
 $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow T(u_n) \rightharpoonup T(u) \in H^r$.
De plus si T est compact ($T \in \mathcal{K}(H^s, H^r)$) alors $T(u_n) \rightarrow T(u)$ dans H^r .

A l'aide de la décomposition (1.121) et des propriétés de convergence de la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (cf lemme 1.12) et de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (cf théorème 1.7), nous allons montrer la stabilité du schéma (1.159). Avant cela, nous établissons quelques lemmes.

Lemme 1.19

i) Pour tout entier n , on a

$$\|D_n u\|_{1/2} \geq \gamma \|u\|_{-1/2} \quad \forall u \in V_n, \quad (1.161)$$

$$\|D_n^{-1} w\|_{-1/2} \leq \frac{1}{\gamma} \|w\|_{1/2} \quad \forall w \in D_n(V_n), \quad (1.162)$$

où $\gamma > 0$ est la constante donnée par le théorème 1.3.

ii) Il existe une constante $c > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ telles que $\forall n \geq N$ on ait

$$\|S_n u\|_{1/2} \geq c \|u\|_{-1/2} \quad \forall u \in V_n, \quad (1.163)$$

$$\|S_n^{-1} w\|_{-1/2} \leq \frac{1}{c} \|w\|_{1/2} \quad \forall w \in S_n(V_n). \quad (1.164)$$

Preuve.

i) $\forall u \in V_n$, on a $\gamma \|u\|_{-1/2}^2 \leq (D_n u, u)_0 \leq \|D_n u\|_{1/2} \|u\|_{-1/2}$, où $\gamma > 0$ est la constante donnée par le théorème 1.3. Ceci montre que la relation (1.161) a bien lieu.

Soit $w = D_n(v)$, avec $v \in V_n$. On a $D_n^{-1}(w) = v$, et donc, en utilisant la relation (1.161) on montre que :

$\|w\|_{1/2} = \|D_n D_n^{-1} w\|_{1/2} \geq \gamma \|D_n^{-1} w\|_{-1/2}$. Ce qui prouve (1.162).

ii) Nous venons de montrer que la relation (1.162) est une conséquence de (1.161). De la même manière, si la relation (1.163) est vraie alors (1.162) est aussi vraie. Il nous suffit donc de montrer que la relation (1.163) a bien lieu.

On procède par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{H}^{-1/2}$ telle que $u_n \in V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n u_n\|_{1/2} = 0, \quad (1.165)$$

$$\|u_n\|_{-1/2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.166)$$

$$u_n \rightharpoonup u, \quad (1.167)$$

où u est un certain élément de $\tilde{H}^{-1/2}$.

On vérifie alors que

$$D_n u_n \rightharpoonup Du. \quad (1.168)$$

En effet, soit $y \in \tilde{H}^{-1/2}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle D_n u_n, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, D_n y \rangle = \langle u, Dy \rangle = \langle Du, y \rangle.$$

La première égalité utilise le caractère autoadjoint de D_n (cf (1.101)), la deuxième utilise la propriété de convergence ponctuelle de D_n vers D (cf lemme 1.12). La troisième est une conséquence de la relation (1.100).

D'autre part, en utilisant le théorème 1.7, on montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n u_n - Ku\|_{1/2} = 0. \quad (1.169)$$

Ainsi, en regroupant les relations (1.168) et (1.169), on déduit que

$$S_n u_n \rightharpoonup Su. \quad (1.170)$$

Puis, en utilisant le point ii) du lemme 1.18, on constate que les relations (1.165) et (1.170) impliquent que $Su = 0$. Mais S étant injectif, on en déduit que $u = 0$. En conséquence, puisque $D_n u_n = S_n u_n - K_n u_n$, les relations (1.165) et (1.169) impliquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n u_n\|_{1/2} = 0. \quad (1.171)$$

Or, en utilisant la relation (1.161), nous vérifions que

$$\|D_n u_n\|_{1/2} \geq \gamma \|u_n\|_{-1/2}. \quad (1.172)$$

On termine la preuve en constatant que les relations (1.172), (1.171) et (1.166) sont incompatibles.

■

Nous introduisons maintenant une famille $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}, V_n)$ de projecteurs définis univoquement par la relation

$$\langle D_n v, \mathcal{R}_n u \rangle_{1/2, -1/2} = \langle D_n v, u \rangle_{1/2, -1/2} \quad \forall u \in \tilde{H}^{-1/2}, \forall v \in V_n, n \in \mathbb{N}. \quad (1.173)$$

En effet, on peut remarquer que D_n étant autoadjoint, si $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ alors $\mathcal{R}_n u \in V_n$ est l'unique solution du problème (1.50), où on a posé $Q_n(u_0) = D_n(u)$.

De plus, on vérifie que si $n \in \mathbb{N}$ et $u \in V_n$ alors $\mathcal{R}_n u = u$, ce qui signifie que $\mathcal{R}_n$ est un projecteur sur V_n .

Nous avons le

Lemme 1.20

Pour tout entier n , l'opérateur $\mathcal{R}_n$ est un projecteur linéaire et continu de $\tilde{H}^{-1/2}$ sur V_n , qui satisfait :

$$\|\mathcal{R}_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}, \tilde{H}^{-1/2})} \leq C, \quad (1.174)$$

$$\|u - \mathcal{R}_n u\|_{-1/2} \leq (1 + C) \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2} \quad \forall u \in \tilde{H}^{-1/2}, \quad (1.175)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n .

Preuve.

Soit $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \mathcal{R}_n u$, et on vérifie que

$$\gamma \|u_n\|_{-1/2}^2 \leq (D_n u_n, u_n)_0 = (D_n u_n, u)_0 \leq \|D_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} \|u\|_{-1/2} \|u_n\|_{-1/2}.$$

Ainsi la relation (1.174) est prouvée avec

$$0 < C = \frac{1}{\gamma} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} < \infty. \quad (1.176)$$

En effet, le nombre $\gamma > 0$ est donné par le théorème 1.3 et

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} < \infty$ (cf remarque 1.12).

Soit maintenant $w \in V_n$ satisfaisant

$$\|u - w\|_{-1/2} = \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2}. \quad (1.177)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \gamma \|u_n - w\|_{-1/2}^2 &\leq \langle D_n(u_n - w), u_n - w \rangle_{1/2, -1/2} = \langle D_n(u_n - w), u - w \rangle_{1/2, -1/2} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} \|u_n - w\|_{-1/2} \|u - w\|_{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.178)$$

où la deuxième étape est due au fait que nous avons posé $u_n = \mathcal{R}_n u$, et donc

$\langle D_n(v), u_n \rangle_{1/2, -1/2} = \langle D_n(v), u \rangle_{1/2, -1/2} \quad \forall v \in V_n$, par définition de $\mathcal{R}_n$.

En combinant (1.178) avec (1.177), nous obtenons bien la relation (1.175) avec C donné par la formule (1.176). ■

Comme conséquence de la relation (1.175), nous déduisons grâce à la propriété (1.158) que $\mathcal{R}_n$ converge ponctuellement vers l'identité, i.e

$$\forall u \in \tilde{H}^{-1/2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \mathcal{R}_n u\|_{-1/2} = 0. \quad (1.179)$$

Lemme 1.21

Soit N l'entier donné par le lemme 1.19. Il existe une constante $\beta > 0$, telle que si n est un entier supérieur à N , alors pour tout $u \in V_n$, il existe $w_u \in \tilde{H}^{-1/2}$ tel que $\|w_u\|_{-1/2} = 1$ et

$$\langle S_n u, w_u \rangle \geq \beta \|u\|_{-1/2}. \quad (1.180)$$

Preuve.

Soit $n \geq N$ et $u \in V_n$, on a que

$$\begin{aligned} \|u\|_{-1/2} &= \|S_n^{-1} S_n u\|_{-1/2} \\ &\leq \frac{1}{c} \|S_n u\|_{1/2} \leq \frac{1}{c} \max_{\substack{w \in \tilde{H}^{-1/2} \\ \|w\|_{-1/2}=1}} \langle S_n u, w \rangle_{1/2, -1/2}. \end{aligned} \quad (1.181)$$

La constante $c > 0$ indépendante de n étant donnée par le lemme 1.19. D'autre part il existe $w_u \in \tilde{H}^{-1/2}$ tel que $\|S_n u\|_{1/2} = \langle S_n u, w_u \rangle_{1/2, -1/2}$ et $\|w_u\|_{-1/2} = 1$. On conclut donc en prenant $\beta = c$. ■

Nous montrons maintenant que l'opérateur S_n vérifie une propriété de type "inf-sup" sur V_n .

Théorème 1.8

Il existe un entier n_0 et une constante $\beta_0 > 0$ tels que $\forall n \geq n_0$, si $v \in V_n$, on peut trouver $\hat{w}_v \in V_n$ satisfaisant $\|\hat{w}_v\|_{-1/2} = 1$ et

$$\langle S_n v, \hat{w}_v \rangle \geq \beta_0 \|v\|_{-1/2}. \quad (1.182)$$

Preuve.

Soit $N \in \mathbb{N}$ comme dans le lemme 1.21. Soit encore n un entier quelconque plus grand que N et $v \in V_n$. On pose $\tilde{w}_v = \mathcal{R}_n w_v$, où $w_v \in \tilde{H}^{-1/2}$, $\|w_v\|_{-1/2} = 1$, est l'élément associé à v comme nous l'avons défini dans le lemme 1.21. On a

$$\begin{aligned} \langle S_n v, \tilde{w}_v \rangle_{1/2, -1/2} &= \langle S_n v, w_v \rangle_{1/2, -1/2} + \langle S_n v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} \\ &= \langle S_n v, w_v \rangle_{1/2, -1/2} + \langle K_n v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2}, \end{aligned} \quad (1.183)$$

où, nous avons utilisé l'identité $\langle D_n v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} = 0$ qui a lieu par définition de $\mathcal{R}_n$. On poursuit en remarquant que

$$\begin{aligned} \langle K_n v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} &= \langle (K_n - K)v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} \\ &\quad + \langle K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2}, \end{aligned} \quad (1.184)$$

puis que

$$\begin{aligned} \langle K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} &= \langle D_n D^{-1} K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} \\ &\quad + \langle (I - D_n D^{-1}) K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2}. \end{aligned} \quad (1.185)$$

On note encore que par définition de $\mathcal{R}_n$, on a pour tout ψ :

$$\langle D_n \mathcal{R}_n \psi, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} = \langle D_n \mathcal{R}_n \psi, \mathcal{R}_n w_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} = 0, \text{ et par suite}$$

$$\begin{aligned} \langle D_n D^{-1} K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} &= \langle D_n (D^{-1} K v - \mathcal{R}_n D^{-1} K v), \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} \\ &= \langle D_n (I - \mathcal{R}_n) D^{-1} K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2}. \end{aligned} \quad (1.186)$$

En regroupant les relations (1.183) à (1.186), on obtient

$$\begin{aligned} \langle S_n v, \tilde{w}_v \rangle_{1/2, -1/2} &= \langle S_n v, w_v \rangle_{1/2, -1/2} + \langle (K_n - K)v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} \\ &\quad + \langle (I - D_n D^{-1}) K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2} \\ &\quad + \langle D_n (I - \mathcal{R}_n) D^{-1} K v, \tilde{w}_v - w_v \rangle_{1/2, -1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\langle S_n v, \tilde{w}_v \rangle_{1/2, -1/2} \geq \beta \|v\|_{-1/2} - \delta_n \|\tilde{w}_v - w_v\|_{-1/2} \|v\|_{-1/2}, \quad (1.187)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \delta_n &= \|K_n - K\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} + \|(I - D_n D^{-1})K\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} \\ &\quad + \|D_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})} \|(I - \mathcal{R}_n)D^{-1}K\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{-1/2})}. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Le théorème 1.7 montre que le premier terme du membre de droite dans (1.188) tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en est de même pour le deuxième terme du membre de droite. En effet, comme D_n converge ponctuellement vers D (cf lemme 1.12) et $K \in \mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{1/2})$ est compact, on peut conclure (cf [19] page 294). Ce même raisonnement permet de montrer que le troisième membre de droite dans (1.188) tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il suffit en effet de constater que $\mathcal{R}_n$ tend ponctuellement vers l'identité (cf 1.179) et que $D^{-1}K \in \mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{-1/2})$ est compact.

Nous avons donc montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. D'autre part $\|\tilde{w}_v - w_v\|_{-1/2} \leq 1 + C$, où $C > 0$ est une constante donnée par le lemme 1.174. En conséquence, nous pouvons affirmer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq N$, tel que si $n \geq n_0$ alors la relation (1.182) est vraie. Il suffit de prendre $\hat{w}_v = \frac{\tilde{w}_v}{\|\tilde{w}_v\|_{-1/2}}$ et $\beta_0 = \frac{\beta}{\|\tilde{w}_v\|_{-1/2}}$.

On vérifie bien que β_0 est strictement positive et indépendante de v . On a en effet que $\|\tilde{w}_v\|_{-1/2} = \|\mathcal{R}_n w_v\|_{-1/2} \leq C$, où $C > 0$ est la constante donnée dans le lemme 1.20. ■

Le théorème 1.8 permet de montrer la stabilité du schéma (1.159). Nous avons en effet le

Théorème 1.9

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et β_0 comme dans le théorème 1.8. Soit encore $u_0 \in H^{1/2}$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, le problème (1.159) possède une unique solution $u_n \in V_n$.

De plus, si $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ est la solution de (1.160), on a la formule d'erreur suivante :

$$\|u - u_n\|_{-1/2} \leq \left(1 + \frac{C}{\beta_0}\right) \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2} \quad \forall n \geq n_0, \quad (1.189)$$

où $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{-1/2})} < \infty$.

Preuve.

Soit $u_0 \in H^{1/2}$. Le théorème 1.8 implique que le problème linéaire (1.159) possède au plus une solution $u_n \in V_n$ pour tout $n \geq n_0$. On conclut que ce problème est bien posé en notant qu'il compte autant d'équations que d'inconnues.

Pour établir la majoration (1.189), on introduit $w_n \in V_n$ tel que

$\|u - w_n\|_{-1/2} = \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{-1/2}$. En utilisant le théorème 1.8, on a que

$$\begin{aligned} \beta_0 \|u_n - w_n\|_{-1/2} &\leq \langle S_n(u_n - w_n), \hat{w}_{u_n - w_n} \rangle_{1/2, -1/2} \\ &= \langle Q_n(u_0) - S_n(w_n), \hat{w}_{u_n - w_n} \rangle_{1/2, -1/2} \\ &= \langle S_n(u - w_n), \hat{w}_{u_n - w_n} \rangle_{1/2, -1/2} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}, H^{-1/2})} \|u - w_n\|_{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.190)$$

où on a tenu compte que $\hat{w}_{u_n - w_n} \in V_n$ et donc

$$\langle S_n u_n, \hat{w}_{u_n - w_n} \rangle_{1/2, -1/2} = \langle Q_n u_0, \hat{w}_{u_n - w_n} \rangle_{1/2, -1/2} = \langle S_n u, \hat{w}_{u_n - w_n} \rangle_{1/2, -1/2}.$$

De plus $\|\hat{w}_{u_n - w_n}\|_{-1/2} = 1$. On remarque finalement que la relation (1.190) implique que l'estimation (1.189) a bien lieu. ■

En conséquence, on remarquera que notre méthode de résolution reste aussi efficace que dans le cas circulaire :

Corollaire 1.3 *Si la solution exacte $u \in \tilde{H}^{-1/2}$ du problème (1.48) vérifie $u \in H^1$, alors on a l'estimation asymptotique de l'erreur entre la solution exacte $u \in V$ et la solution approchée $u_n \in V_n$:*

$$\|u - u_n\|_{-1/2} \leq \frac{C}{n^{3/2}} \|u\|_1,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n .

Preuve.

On a $\min_{\chi \in V_n} \|u - \chi\|_{-1/2} \leq \|u - \mathcal{P}_n(u)\|_{-1/2}$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 1.9 et la relation (1.156) pour terminer la preuve. ■

Remarque 1.14 *En pratique, nous utiliserons l'intégration numérique pour construire le système (1.159). Cependant, nous ne referons pas ici l'analyse du schéma avec intégration numérique. En effet, comme nous l'avons signalé dans la remarque 1.13, tous les résultats relatifs à la prise en compte de l'erreur dû à l'intégration numérique dans le cas circulaire (cf paragraphe 1.3.4) s'adaptent immédiatement au cas général.*

1.5 Exemples numériques.

Dans ce chapitre, nous allons mettre en oeuvre notre méthode et la tester sur quelques exemples.

Rappelons, brièvement en quoi consiste notre méthode pour résoudre un problème de Laplace.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de frontière Γ . Soit encore la donnée d'une fonction $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, nous voulons déterminer $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.191)$$

Nous supposons que Γ est donnée par une paramétrisation régulière, i.e $\Gamma = \{x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}$, avec $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre positif à choisir. Nous définissons la famille $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de courbes auxiliaires par

$$\tilde{\Gamma}_n = \left\{ x_n(t) \in \mathbb{R}^2 : x_n(t) = x(t) + \frac{\lambda}{n} \zeta(t), t \in [0, 1] \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.192)$$

où $\zeta(t)$ est la normale unité extérieure à Γ en $x(t)$.

On pose $w_0(t) = u_0(x(t)) \|x'(t)\|$, $t \in [0, 1]$.

Notre méthode consiste à déterminer $u_n \in V_n$ solution de

$$\int_0^1 \int_0^1 u_n(t) K(x_n(s), x(t)) v(s) dt ds = \int_0^1 \int_0^1 w_0(t) K_{n_y}(x_n(s), x(t)) v(s) dt ds, \quad (1.193)$$

pour tout $v \in V_n$.

On obtient ensuite $\beta \in \mathbb{R}$ par

$$\beta = \int_0^1 \int_0^1 (w_0(t)K_{n_y}(x_n(s), x(t)) - u_n(t)K(x_n(s), x(t))) dt ds, \quad (1.194)$$

où $K(., .)$ et $K_{n_y}(., .)$ sont les noyaux donnés par

$$K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \|x - y\|, \quad K_{n_y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(n_y(y), x - y)}{\|x - y\|^2}.$$

Après avoir construit puis résolu le système (1.193)-(1.194), nous obtenons une solution approchée de (1.191) en posant

$$u(z) = \beta + \int_0^1 (u_n(t)K(z, x(t)) - w_0(t)K_{n_y}(z, x(t))) dt, \quad z \in \Omega. \quad (1.195)$$

Remarque 1.15 Dans le cas d'un problème de Laplace extérieur il faut tenir compte de quelques modifications (cf remarque 1.5). Concrètement, les modifications sont les suivantes : prendre λ négatif dans (1.192), l'équation (1.193) peut-être conservée, mais il faut changer le signe dans (1.194).

Finalement la solution approchée s'obtient en posant

$$u(z) = \beta + \int_0^1 (-u_n(t)K(z, x(t)) + w_0(t)K_{n_y}(z, x(t))) dt, \quad z \in \Omega'. \quad (1.196)$$

1.5.1 Construction et résolution du problème discret.

Nous allons préciser ici comment construire la matrice et le second membre correspondants au système (1.193)-(1.194).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on découpe uniformément l'intervalle $[0, 1]$ en $n+1$ sous-intervalles $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = 1, \dots, n+1$, où on a posé $\theta_i = \frac{i}{n+1}$.

On considère la base $\hat{\beta}_n = \{\eta_1, \dots, \eta_{n+1}\}$ de $\hat{V}_n$, avec $\eta_j = 1_{[\theta_{j-1}, \theta_j]}$.

Pour $j = 1, \dots, n$, on pose $\psi_j = \eta_j - \eta_{j+1}$. Ainsi le système $\beta_n = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ est une base de V_n .

Nous cherchons donc la fonction u_n sous la forme

$$u_n = \sum_{j=1}^n w_j \psi_j, \quad (1.197)$$

qui satisfait l'équation (1.193). Ceci peut-être écrit matriciellement de la manière suivante :

$$\text{chercher } w \in \mathbb{R}^n \text{ tq } Aw = b, \quad (1.198)$$

où on a posé

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}; \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

avec

$$a_{i,j} = \int_0^1 \int_0^1 K(x_n(s), x(t)) \psi_j(t) \psi_i(s) dt ds, \quad (1.199)$$

$$b_i = \int_0^1 \int_0^1 K_{n_y}(x_n(s), x(t)) w_0(t) \psi_i(s) dt ds. \quad (1.200)$$

Soit $k, l = 1, \dots, n+1$, on pose

$$c_{k,l} = \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} K(x_n(s), x(t)) dt ds. \quad (1.201)$$

Ainsi la relation (1.199) devient

$$a_{i,j} = c_{i,j} - c_{i,j+1} - c_{i+1,j} + c_{i+1,j+1}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.202)$$

Nous posons aussi

$$d_{k,l} = \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} w_0(t) K_{n_y}(x_n(s), x(t)) dt ds. \quad (1.203)$$

Ainsi

$$b_i = \sum_{j=1}^{n+1} (d_{i,j} - d_{i+1,j}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.204)$$

Enfin la relation (1.194) s'écrit

$$\beta = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} d_{i,j} - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n w_j (c_{i,j} - c_{i,j+1}). \quad (1.205)$$

Pour construire notre problème discret, nous sommes donc amenés à évaluer les termes intégraux donnés par les formules (1.201) et (1.203).

Nous allons effectuer cela, en utilisant l'intégration numérique. On utilise les notations $\tilde{c}_{i,j}$ et $\tilde{d}_{i,j}$, pour désigner des approximations de $c_{i,j}$ et $d_{i,j}$ obtenues par intégration numérique.

• Calcul des termes intégraux.

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le choix des courbes auxiliaires données par la relation (1.192), nous assure un bon comportement de notre schéma. Par contre, nous devons adapter les formules d'intégration numérique en fonction du paramètre n .

Plus précisément, dans le théorème 1.5 nous avons montré qu'en utilisant les formules (1.115) et (1.116), on a

$$|c_{i,j} - \tilde{c}_{i,j}| \leq \frac{C}{n^4}, \quad (1.206)$$

$$|d_{i,j} - \tilde{d}_{i,j}| \leq \frac{C}{n^4}, \quad (1.207)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n .

Nous sommes ensuite arrivés à la conclusion que les inégalités (1.206) et (1.207) impliquaient que le schéma avec intégration numérique restait aussi efficace que le schéma avec intégration exacte. Cependant, comme nous l'avons signalé dans la remarque 1.13, il convient en pratique d'affiner les formules (1.115) et (1.116) pour optimiser le temps de calcul.

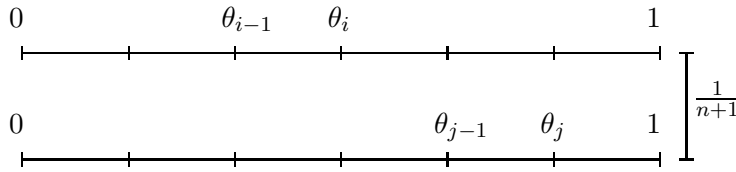
On note par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty[0, 1]^2$, les suites de fonctions définies par $f_n(s, t) = K(x_n(s), x(t))$ et $g_n(s, t) = K_{n_y}(x_n(s), x(t))$.

Il est bien clair que les estimations

$$\max_{\substack{(s,t) \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j] \\ k+l=q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial s^k \partial t^l} f_n(s, t) \right| \leq C.n^{\alpha_q^{(1)}}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.208)$$

$$\max_{\substack{(s,t) \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j] \\ k+l=q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial s^k \partial t^l} g_n(x, y) \right| \leq C.n^{\alpha_q^{(2)}}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.209)$$

où $\alpha_q^{(1)} = q$ et $\alpha_q^{(2)} = q + 1$, que nous avons utilisés pour établir les relations (1.206) et (1.207) sont en général trop grossières car elles ne tiennent pas compte des indices i et j . Pour remédier à cela, nous introduisons une grandeur destinée à mesurer la “proximité” de l’intervalle $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ avec l’intervalle $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, sachant que ces intervalles sont placés sur deux droites parallèles distantes de $\frac{1}{n+1}$ unité.



Sachant que l’on considère des fonctions 1-périodiques, on définit une distance entière entre intervalle par

$n_{i,j} = \min \{|i - j|, n + 1 - |i - j|\}$, puis une approximation de la “distance réelle” est donnée par

$$d_{i,j} = h\sqrt{1 + n_{i,j}^2} = h^{\delta_{i,j}},$$

avec $\delta_{i,j} = 1 + \frac{\log(1 + n_{i,j}^2)}{2 \log h}$, $h = \frac{1}{n + 1}$. (1.210)

La grandeur $0 \leq \delta_{i,j} \leq 1$, est une distance logarithmique, qui nous permet de remplacer l’estimation $\alpha_q^{(1)} = q$ par $\alpha_q^{(1)} = \delta_{i,j}q$ dans la relation (1.208), et $\alpha_q^{(2)} = q + 1$ par $\alpha_{q+1}^{(2)} = \delta_{i,j}(q + 1)$ dans la relation (1.209).

Ainsi, pour le calcul des termes (1.201), on peut remplacer les coefficients r_1 et β_1 dans la formule (1.115) par

$$2\delta_{i,j}r_1 - 2\beta_1r_1 = -2. \quad (1.211)$$

Un choix particulier est donné par

$$\beta_1 = 1.1, \quad r_1 = \left[\frac{1}{\beta_1 - \delta_{i,j}} \right]. \quad (1.212)$$

Ce choix, implique en pratique qu’il n’y a quasiment pas de subdivision. En effet, pour $n = 1000$, on vérifie que $1000^{1.1-1} \approx 2$. Les termes les moins critiques seront calculés avec $r_1 = 2$ points de Gauss. Par contre, les termes diagonaux seront toujours calculés avec $r_1 = 10$ points de Gauss, ce qui correspond à une somme d’au moins 100 termes pour une intégrale double. La formule pourrait encore être sensiblement améliorée, mais ce n’est pas l’objet de ce travail. De la même manière, nous remplaçons les coefficients r_2 et β_2 dans la formule (1.116) par

$$2\delta_{i,j}r_2 - 2\beta_2r_2 = -3. \quad (1.213)$$

En pratique, nous utiliserons le cas particulier donné par

$$\beta_2 = 1.1, \quad r_2 = \left[\frac{3}{2} \frac{1}{\beta_2 - \delta_{i,j}} \right]. \quad (1.214)$$

• **Résolution et calcul de la solution approchée.**

Nous savons maintenant comment construire la matrice A et le second membre b de l'équation (1.198). Remarquons que la matrice A est pleine et non symétrique. Elle devrait cependant être définie positive et bien conditionnée.

Nous avons choisit d'utiliser une méthode directe de la librairie Lapack, pour résoudre (1.198) et obtenir w .

Lorsque l'on a calculé w , on peut estimer β avec la formule (1.205).

Soit $z \in \Omega$ et $j = 1, \dots, n$, on pose

$$e_j(z) = \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} K(z, x(t)) dt, \quad (1.215)$$

$$f_j(z) = \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} w_0(t) K_{n_y}(z, x(t)) dt. \quad (1.216)$$

On obtient une approximation $\tilde{u}(z)$ de la solution u du problème (1.191) évaluée en $z \in \Omega$, en calculant

$$\tilde{u}(z) = \beta + \sum_{j=1}^n w_j (e_j(z) - e_{j+1}(z)) - \sum_{j=1}^{n+1} f_j(z).$$

Les termes intégraux (1.215) et (1.216), sont calculés par intégration numériques :

$$e_j(z) \approx \frac{h}{2} \sum_{p=1}^r m_p K(z, x(\varphi_j(\xi_p))), \quad (1.217)$$

$$f_j(z) \approx \frac{h}{2} \sum_{p=1}^r m_p w_0(\varphi_j(\xi_p)) K_{n_y}(z, x(\varphi_j(\xi_p))), \quad (1.218)$$

où $(m_p, \xi_p)_{p=1, \dots, r}$ est une formule de Gauss sur $[-1, 1]$ et les transformations affines φ_j , $j = 1, \dots, n+1$, sont données par $\varphi_j(u) = \frac{h}{2}(u + 2j - 1)$. Les calculs des coefficients selon (1.217) et (1.218) ne sont pas coûteux et on peut donc choisir p assez grand pour obtenir une bonne approximation des intégrales, même si z est proche de la frontière Γ .

1.5.2 Applications

• **Résolution d'un problème de Laplace intérieur.**

Le premier exemple que nous considérons est un problème de Laplace intérieur (cf (1.191)), où Ω est le domaine elliptique donné par

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1 = r \cos(2\pi t), x_2 = 0.4r \sin(2\pi t)), 0 \leq t \leq 1, 0 \leq r \leq 1\}.$$

La frontière Γ est alors donnée par la paramétrisation

$$x(t) = (\cos(2\pi t), 0.4 \sin(2\pi t)).$$

Nous avons considéré le cas test où la solution exacte à (1.191) est $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos(x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Ainsi l'expression de la donnée w_0 est :

$$w_0(t) = e^{\cos(2\pi t)} \cos(0.4 \sin(2\pi t)) \|x'(t)\|,$$

$$\text{avec } \|x'(t)\| = 2\pi \sqrt{\sin^2(2\pi t) + 0.4^2 \cos^2(2\pi t)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ donné, nous calculons la densité approché u_n sous la forme (1.197). On considère l'erreur L^2 relative entre la densité exacte et la densité approchée :

$$E_n = \frac{\sqrt{\int_0^1 |u_n(t) - w(t)|^2}}{\sqrt{\int_0^1 |w(t)|^2}}, \quad (1.219)$$

où on a posé $w(t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x(t)) \|x'(t)\|$.

Dans la figure 1.7 nous avons représenté la courbe donnant $-\log_{10}(E_n)$ en fonction de $\log_{10}(n)$. On obtient une droite de pente α , avec $1 < \alpha < 1.5$, ce qui est légèrement meilleur que le résultat démontré. En effet, nous avons montré que $\|u_n - w\|_{-1/2} = O(\frac{1}{n^{3/2}})$, ce qui est équivalent à $\|u_n - w\|_0 = O(\frac{1}{n})$ (ceci se montre en utilisant les relations (1.13) et (1.14)).

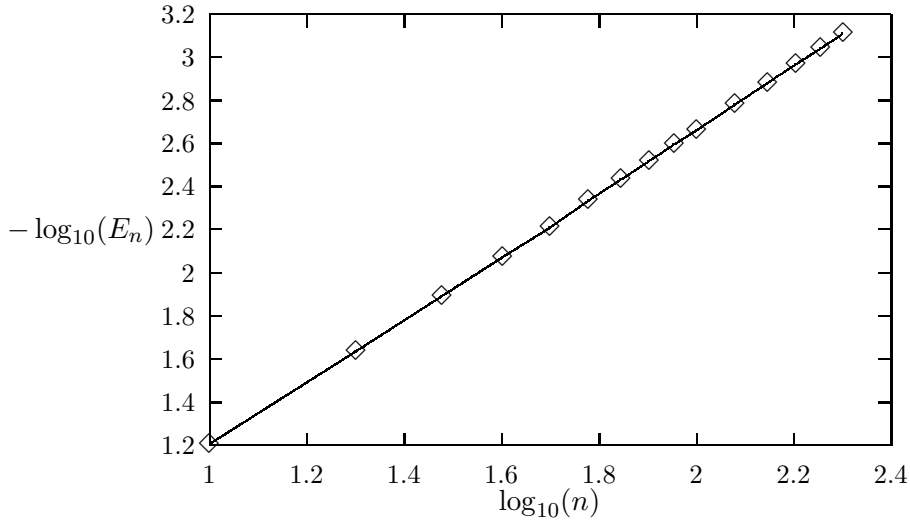


FIG. 1.7 – Erreur L^2 sur la densité.

On considère 4 points dans Ω donnés par

$$z_i = r_i \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.220)$$

avec $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.8$, $r_3 = 0.9$ et $r_4 = 0.99$.

A partir de la densité approché, nous évaluons (à l'aide de la formule (1.195)) la solution approchée $\tilde{u}(z_i) \approx u(z_i)$ du problème de Laplace dans Ω , aux points définis en (1.220).

Dans le tableau 1.1, pour différentes valeurs de n , on a reporté la valeur β ainsi que l'erreur relative E_i en pourcent entre $\tilde{u}(z_i)$ et $u(z_i)$.

Nous avons utilisé 20 points de Gauss, pour le calcul des expressions (1.217) et (1.218). Pourtant, les différentes valeurs de E_4 nous montrent que cela peut-être insuffisant, si on considère un point très près du bord. En fait, il faudrait ici aussi utiliser une méthode composite, liée à un sous raffinement des intervalles $[\theta_{i-1}, \theta_i]$.

n	β	E_1	E_2	E_3	E_4
10	-3.86×10^{-5}	4.87×10^{-2}	8.65×10^{-3}	1.73×10^{-1}	30.0
20	-1.25×10^{-6}	3.02×10^{-3}	1.13×10^{-2}	3.31×10^{-2}	5.73×10^{-1}
40	2.22×10^{-10}	3.27×10^{-4}	1.75×10^{-4}	2.38×10^{-3}	2.15
60	6.48×10^{-8}	1.07×10^{-4}	3.84×10^{-5}	4.09×10^{-4}	5.98×10^{-1}
80	7.83×10^{-8}	5.21×10^{-5}	8.93×10^{-6}	6.34×10^{-5}	1.04×10^{-3}
100	8.09×10^{-8}	3.23×10^{-5}	7.19×10^{-6}	2.01×10^{-5}	3.96×10^{-2}
200	8.42×10^{-8}	1.40×10^{-5}	3.09×10^{-6}	2.65×10^{-6}	3.52×10^{-4}

TAB. 1.1 – Erreur relative (%) en 4 points de Ω

• **Résolution d'un problème de Laplace extérieur.**

On considère un domaine Ω dont la frontière est une courbe de Lissajoux (cf figure 1.8) dont la paramétrisation est :

$$x(t) = (r(t) \cos(2\pi t), r(t) \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1], \quad (1.221)$$

avec $r(t) = 0.7 + 0.3 \cos(10\pi t)$.

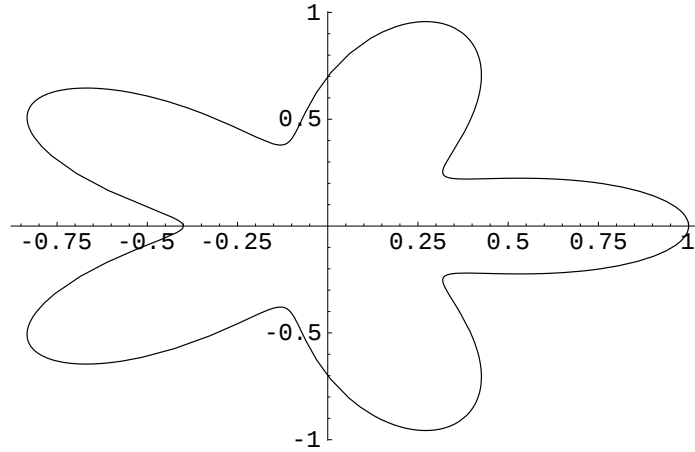


FIG. 1.8 – Courbe de Lissajoux.

Soit u la fonction définie sur Ω' par

$$u(x) = 2 + \log \|x\| - \log \|x - (0, 0.25)\|.$$

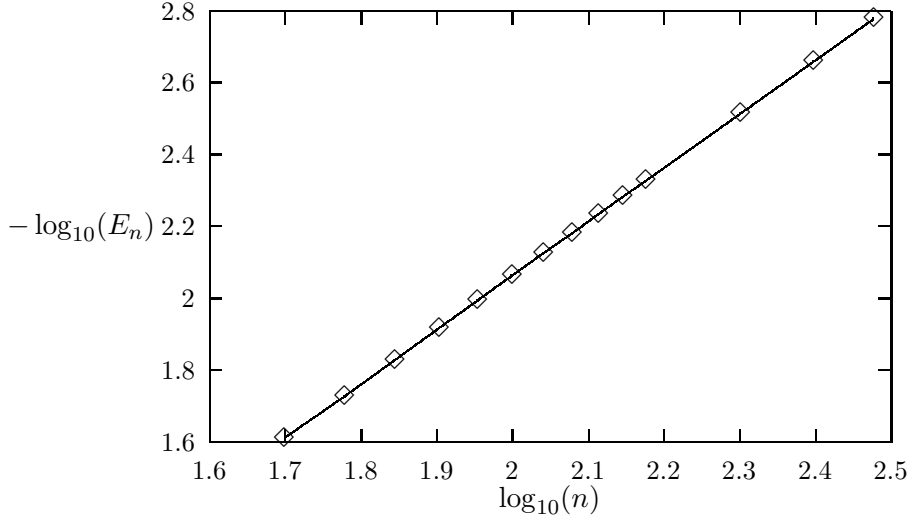
On vérifie bien que u est harmonique dans Ω' et que $u(x) = O(1)$, lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$.

Afin de tester notre méthode avec ce cas, nous considérons la donnée w_0 , dont l'expression est :

$$w_0(t) = u(x(t)) \|x'(t)\|,$$

où $x(t)$ est comme en (1.221) et l'expression de $\|x'(t)\|$ s'en déduit aisément.

Dans la figure 1.9 nous avons représenté la courbe donnant $-\log_{10}(E_n)$ en fonction de $\log_{10}(n)$, où E_n est l'erreur relative entre la densité exacte et la densité approchée (cf (1.219)). On obtient à nouveau une droite de pente légèrement supérieure à 1.

FIG. 1.9 – Erreur L^2 sur la densité.

n	β	E_1	E_2	E_3	E_4
50	2.00005	3.01×10^{-3}	6.54×10^{-4}	5.86×10^{-3}	7.65×10^{-2}
60	2	3.71×10^{-4}	4.45×10^{-4}	2.60×10^{-3}	2.10×10^{-2}
70	2	3.27×10^{-4}	3.36×10^{-4}	7.87×10^{-4}	7.07×10^{-3}
80	2	1.36×10^{-4}	4.61×10^{-4}	2.89×10^{-4}	2.99×10^{-3}
90	2	9.95×10^{-5}	2.67×10^{-4}	2.17×10^{-4}	1.56×10^{-3}
100	2	7.19×10^{-5}	1.35×10^{-4}	2.11×10^{-4}	9.41×10^{-4}
150	2	1.75×10^{-5}	4.25×10^{-5}	6.71×10^{-5}	1.61×10^{-4}
200	2	6.63×10^{-6}	1.79×10^{-5}	2.78×10^{-5}	4.00×10^{-5}
250	2	3.01×10^{-6}	9.16×10^{-6}	1.40×10^{-5}	1.10×10^{-5}
300	2	1.46×10^{-6}	5.33×10^{-6}	8.06×10^{-6}	2.74×10^{-6}

TAB. 1.2 – Erreur relative (%) en 4 points de Ω' .

On considère 4 points dans Ω' donnés par

$$z_i = \rho_i x(0.5), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.222)$$

avec $\rho_1 = 1.5$, $\rho_2 = 1.2$, $\rho_3 = 1.1$ et $\rho = 1.01$.

A partir de la densité approché, nous évaluons (à l'aide de la formule (1.196)) la solution approchée $\tilde{u}(z_i) \approx u(z_i)$ du problème de Laplace dans Ω' , aux points définis en (1.222).

Dans le tableau 1.2, pour différentes valeurs de n , on a reporté la valeur β ainsi que l'erreur relative E_i en pourcent entre $\tilde{u}(z_i)$ et $u(z_i)$.

1.6 Conclusion

Dans le paragraphe précédent nous avons testé notre méthode d'un point de vue pratique. Les résultats numériques obtenus sont en total accord avec les estimations théoriques de l'erreur que nous avons établi (cf corrolaire 1.3).

Il apparaît donc que notre méthode est aussi efficace que la méthode de référence (cf (1.49)). De plus, elle présente l'avantage de ne pas faire apparaître d'intégrale singulière, ce qui

simplifie son implémentation sur ordinateur. Remarquons cependant qu'en ce qui concerne son application pour la résolution des problèmes que nous avons considérés (problèmes de Laplace intérieur et extérieur dans le plan), le gain est assez limité. En effet, dans ce cas les intégrales qui apparaissent dans le schéma de référence (1.49) ne posent pas trop de difficultés de calcul. Par contre, il en est autrement par exemple pour un problème de Laplace tridimensionnel. Nous pensons que dans ce cas, il serait assez facile d'adapter notre méthode et de prouver des résultats théoriques analogues à ceux présentés dans les paragraphes 1.3 et 1.4. On pourrait alors s'attendre à ce que notre méthode présente un avantage pratique sensible par rapport aux méthodes classiques. Remarquons néanmoins que notre méthode introduit un paramètre λ servant à construire les courbes auxiliaires (cf (1.192)). Il se pose donc le problème du choix de ce paramètre. En particulier, si ce paramètre est choisi trop grand, il peut y avoir des problèmes de conditionnement pour les systèmes linéaires à résoudre.

En résumé, il ressort de notre étude que la méthode intégrale sans singularité décrite dans ce chapitre est en tout cas compétitive par rapport aux méthodes intégrales habituellement utilisées. Nous pensons aussi que son intérêt est assez général, comme en témoignent les travaux de certains ingénieurs (cf [31],[28]). Cela sera peut-être justifié dans une étude ultérieure.

Bibliographie

- [1] K. E. Atkinson, *The numerical solution of integral equations of the second kind*, Cambridge University Press, (1997).
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, (1993).
- [3] G.Chen, J.Zhou, *Boundary element methods*, Academic Press, (1992).
- [4] S. Christiansen, *On Kupradze's functional equations for plane harmonic problems*, in : function theoretic methods in differential equations, research notes in mathematics vol 8 (R.P Gilbert and Weinacht R.j , eds), pages 205-243, (1976).
- [5] S. Christiansen, *Condition number of matrices derived from two classes of integral equations*, math. meth. in the appl. sci. 3, pages 364-392, (1981).
- [6] M. Costabel, *Boundary integral operators on lipschitz domains: elementary results*, SIAM j. math. anal., vol 19, num. 3, pages 613-626, (1988).
- [7] M. Golberg (éditeur), *Boundary Integral Methods, Numerical and Mathematical Aspects*, computational mechanics publications, (1998).
- [8] M.A. Golberg, C.S. Chen, *Discrete projection methods for integral equation*, computational mechanics publications, (1997).
- [9] S. Hildebrandt, E. Wienholtz, *Constructive proofs of representation theorems in separable Hilbert space*, communications on pure and applied mathematics, vol XVII, pages 369-373, (1964).
- [10] R.L Johnston, *An adaptative indirect boundary element method with applications*, conference boundary elements VIII, pages 587-597, (1986).
- [11] M. Katsurada, *A mathematical study of the charge simulation I*, j. fac. sci. univ. Tokyo sect. IA, math, 35, pages 507-518, (1988).
- [12] M. Katsurada, *A mathematical study of the charge simulation II*, j. fac. sci. univ. Tokyo sect. IA, math, 36, pages 135-162, (1989).
- [13] M. Katsurada, *Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with analytic boundary*, j. fac. sci. univ. Tokyo sect. IA, math, 37, pages 635-657, (1990).
- [14] M. Katsurada, H. Okamoto, *The collocation points of the fundamental solution method for the potentiel problem*, computers math. applic. vol 31, num. 1, pages 123-137, (1996).
- [15] T. Kitagawa, *On the numerical stability of the method of fundamental solution applied to the Dirichlet problem*, Japan j. appl. math., 5, pages 123-133, (1988).
- [16] T. Kitagawa, *Asymptotic stability of the fundamental solution method*, j. comp. and appl. math. 38, pages 263-269, (1991).
- [17] R. Kress, A. Mohsen, *On the simulation source technique for exterior problems in acoustics*, math. meth. in the appl. sci. 8, pages 585-597, (1986).
- [18] R. Kress, *Linear integral equations*, Springer-Verlag, (1989).
- [19] R. Kress, *Numerical analysis*, Springer, (1997).

- [20] V.D. Kupradze, *Dynamical problems in elasticity*, in : Progress in Solid Mechanics, vol. 3 (J.N. Sneddon and R. Hill, eds), pages 1-259, (1963).
- [21] M. Lenoir, M. Vullierme-Ledard, C. Hazard, *Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems*, SIAM J. math. anal., vol 23, num 3, pages 579-608, (1992).
- [22] M.N Le Roux, *Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2*, RAIRO, analyse numérique vol 11, n°1, pages 27-66, (1977).
- [23] J.C Nédélec, *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, centre de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique de Palaiseau, (1977).
- [24] S. Prossdorf, B. Silbermann, *Numerical analysis for integral and related equations*, Birkhauser, (1991).
- [25] I.H. Sloan, *The Galerkin method for integral equation of the first kind with logarithmic kernel: Theory*, IMA journal of numerical analysis 8, pages 105-122, (1988).
- [26] I.H. Sloan, *The Galerkin method for integral equation of the first kind with logarithmic kernel: Applications*, IMA journal of numerical analysis 8, pages 123-140, (1988).
- [27] I.H. Sloan, *Error analysis of boundary integral methods*, Acta numerica 1, pages 287-339, (1992).
- [28] J.L Wearing, M.A. Sheikh, *A regular indirect boundary element method for thermal analysis*, int. journal of numerical methods in engineering, vol 25, pages 495-515, (1988).
- [29] W.L. Wendland, *A finite element method for some integral equations of the first kind*, journal of math. anal. and appl. 58, pages 449-481, (1977).
- [30] W.L Wendland, N. Arnold, *On the asymptotic convergence of collocation methods*, math. of comp., vol 41, number 164, pages 349-381, (1983).
- [31] R. Yuuki, T. Matsumoto, H. Kisu, *The usefulness and limit of the direct regular method in boundary element elastostatic analysis*, JSME vol 30, num. 260, pages 227-233, (1987).

Chapitre 2

Etude d'un problème de chauffage par induction présentant une invariance dans une direction

2.0 Introduction

Le chauffage par induction est utilisé pour le traitement thermique des pièces métalliques dans des procédés industriels tels que le brasage, la frappe à chaud ou la trempe (c.f fig. 2.1).

Le principe du chauffage par induction peut être résumé de la manière suivante : à l'aide d'un inducteur on crée un champ magnétique variable dans une zone où se trouve le conducteur, ceci induit des courants de Foucault dans le conducteur qui vont provoquer une élévation de sa température par effet joule.

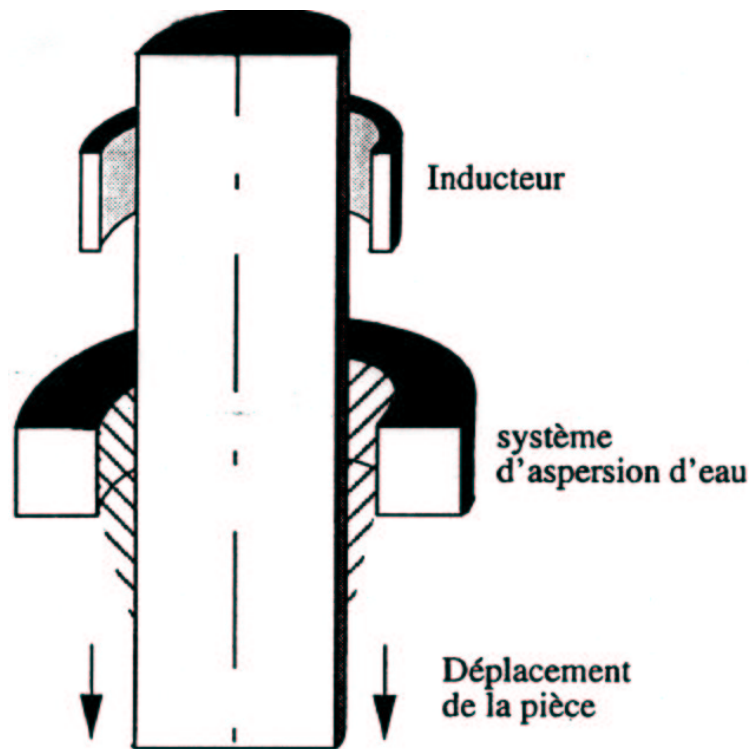
L'intérêt de ce procédé par rapport à des méthodes classiques de chauffage en four réside dans sa précision : il permet par exemple de contrôler la profondeur de pénétration de l'énergie thermique par le réglage de la fréquence d'alimentation de l'inducteur. Il est aussi possible d'exercer des actions thermiques sur des zones localisées de la pièce, mais en contrepartie il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance des phénomènes complexes mis en jeu et la conception d'un inducteur performant peut se révéler difficile.

La simulation numérique trouve là tout son intérêt car une fois au point elle permet de tester rapidement différentes configurations afin d'optimiser le processus. C'est un tel constat qui motive ce travail dans lequel nous aborderons la modélisation du chauffage par induction et l'étude mathématique du modèle obtenu.

Malgré l'apparente simplicité du chauffage par induction il est en fait régi par des phénomènes électromagnétiques et thermiques complexes et nous considérerons un problème simplifié qui constitue un cas particulier du problème tridimensionnel. Ainsi nous supposons que l'inducteur et l'induit sont très longs dans une direction (c.f fig 2.2) et que la température est imposée sur le bord du conducteur.

Dans la littérature on trouvera différents articles traitant de ce sujet : certains sont orientés vers la physique ou les applications (c.f [5] et [7]) et d'autres vers les mathématiques (c.f [4] et [9]).

D'un point de vue plus général sur la modélisation en électromagnétisme, on pourra consulter [1].

FIG. 2.1 – *trempe par défilée*

2.1 Modélisation

Ce chapitre est consacré à l'élaboration d'un modèle mathématique décrivant le processus de chauffage par induction stationnaire d'une pièce métallique entourée d'un inducteur dans lequel circule des courants alternatifs sinusoïdaux.

Notre but est de déterminer la température dans la pièce, lorsque le courant total circulant dans l'inducteur est connu.

Nous ne considérerons que le cas de géométries invariantes par translation dans une direction d'espace, ce qui nous amènera à construire un modèle bidimensionnel.

Les phénomènes physiques en présence étant de natures électromagnétiques et thermiques, nous nous pencherons tour à tour sur chacun de ces deux aspects. Nous commencerons par établir les équations qui régissent les aspects électromagnétiques du problème. Pour cela, nous partirons des équations de Maxwell, que nous simplifierons en utilisant les particularités du problème considéré. Nous aboutirons ainsi à un problème électromagnétique, qui consiste à déterminer un potentiel φ dans $\mathbb{R}^2$ solution d'un système d'équations aux dérivées partielles. Dans ce système la température θ des conducteurs est supposée connue.

Nous décrirons ensuite un modèle simplifié pour la thermique, et nous énoncerons un problème thermique. Celui-ci consiste à déterminer la température dans la pièce, en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles en θ dans lequel φ est considérée comme une donnée.

Finalement, nous écrirons le problème complet en couplant les problèmes électromagnétiques et thermiques.

2.1.1 Données du problème

Nous voulons étudier les phénomènes de chauffage par induction, lorsque **la géométrie du dispositif inducteur-induit est invariante par translation**.

En d'autres termes, nous considérons le chauffage par induction d'une pièce qui est un conducteur simplement connexe, infiniment long dans une direction et dont les caractéristiques physiques et géométriques sont invariantes suivant cette direction. L'inducteur présentera les mêmes caractéristiques, si ce n'est qu'il sera constitué d'une boucle enlaçant le conducteur dans sa direction d'invariance et se refermant à l'infini.

On note $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ qui engendre les axes (x_1, x_2, x_3) et la direction d'invariance sera toujours supposée être la direction $\mathbf{e}_3$.

Une configuration pratique qui a approximativement les caractéristiques considérées est représentée dans la figure 2.2, et nous montrerons que l'on peut restreindre le domaine d'étude au plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (cf. fig. 2.3).

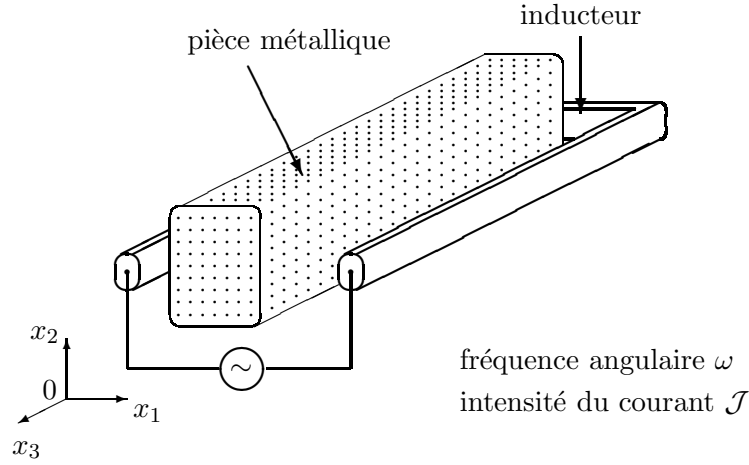


FIG. 2.2 – Géométrie 3D du problème.

Nous notons par Ω_0 la section du conducteur dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et par Ω_1 et Ω_2 les deux composantes connexes de la section de l'inducteur.

Nous notons aussi par $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ la réunion des sections des domaines conducteurs et inducteurs et $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ la partie complémentaire constituée d'air.

La **distribution du courant** est une inconnue du problème, mais le courant total circulant dans l'inducteur est connu. Nous notons par $\mathcal{J}$ cette donnée.

L'hypothèse "intuitive" que nous ferons est la suivante :

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{La densité de courant } \mathbf{J} \text{ est parallèle à } \mathbf{e}_3 \text{ en tout point } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \text{des conducteurs. De plus, } \mathbf{J}(\mathbf{x}) \text{ est indépendant de } x_3, \text{ i.e} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(x), \text{ où } x = (x_1, x_2). \\ \text{Nous supposons aussi que le courant total passant dans } \Omega_1 \text{ est égal} \\ \text{à l'opposé de celui passant dans } \Omega_2 \text{ et il est nul dans } \Omega_0. \end{array} \right.$$

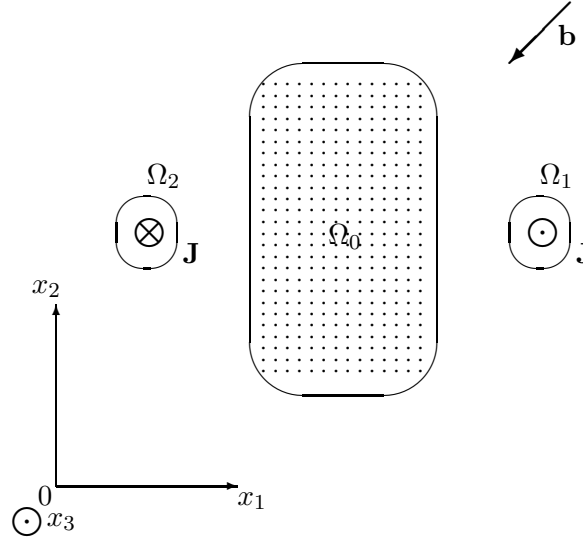


FIG. 2.3 – Géométrie 2D du problème

2.1.2 Modélisation de l'électromagnétisme

Nous reprenons les mêmes idées que celles présentées dans les articles [10] et [6]. On part des **équations de Maxwell** dans lesquelles on néglige les courants de déplacement (approximation de l'électrotechnique). On obtient ainsi un système d'équations aux dérivées partielles où les inconnues sont les champs vectoriels $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ et la densité de courant $\mathbf{J}$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (2.3)$$

On ajoute ensuite comme **loi de comportement** la relation $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ dans $\mathbb{R}^3$, ainsi que la loi d'Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ dans les conducteurs. La fonction μ est appelée perméabilité magnétique et σ est la conductivité électrique.

Les équations (2.1) à (2.3) deviennent :

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \mathbf{J} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{dans les conducteurs}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J} = 0 \quad \text{dans le vide}. \quad (2.8)$$

Les équations de Maxwell ne sont plus valables au sens classique sur les interfaces entre deux milieux mais elles restent vraies en distribution et on peut établir des **relations de continuités des champs à travers les interfaces**.

Soit Σ une interface entre deux milieux de $\mathbb{R}^3$, pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma$ on note $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ la normale orientée et $\tau(\mathbf{x})$ un vecteur tangent à l'interface Σ . En supposant qu'il n'y ait pas de courant de surface sur Σ , on montre que les composantes tangentielles de $\mathbf{H}$, la composante normale de $\mathbf{B}$ et les composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ sont continues, ce qui s'écrit de la manière suivante :

$$[\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0, \quad (2.9)$$

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0, \quad (2.10)$$

$$[\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0, \quad (2.11)$$

où on a utilisé la notation $[[f]]_{\Sigma}$ pour désigner le saut d'une fonction à travers Σ , i.e $[[f]]_{\Sigma} = f_+ - f_-$, où f_+ est la valeur "en avant" de $\mathbf{n}$ et f_- est la valeur "en arrière" de $\mathbf{n}$.

Examinons à présent la **dépendance temporelle des champs**.

Etant donné que l'inducteur est alimenté en régime sinusoïdal permanent, nous supposons qu'un régime sinusoïdal de même fréquence s'établit dans l'induit, i.e

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{b}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{e}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \}.$$

Ainsi on ne s'intéressera qu'aux champs stationnaires complexes $\mathbf{j}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{e}(\mathbf{x})$. Le système (2.4) à (2.8) prend la forme suivante :

$$\text{div}(\mathbf{b}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.12)$$

$$\text{rot}\left(\frac{\mathbf{b}}{\mu}\right) = \mathbf{j} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.13)$$

$$i\omega \mathbf{b} + \text{rot}(\mathbf{e}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad \text{dans les conducteurs}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{j} = 0 \quad \text{dans le vide}. \quad (2.16)$$

Nous allons maintenant introduire un **potentiel magnétique** qui nous permettra d'écrire plus simplement le système (2.12) à (2.16).

Une des hypothèses que nous avons faite dans $(\mathcal{H})$ est de considérer que $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ est de la forme $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = j(x)\mathbf{e}_3$, où $x = (x_1, x_2)$ est la projection de $\mathbf{x}$ sur le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Grâce à cette propriété, nous vérifions que chacun des champs $\mathbf{j}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{e}$ sont indépendants de la coordonnée x_3 . En effet, on déduit des relations (2.15) et (2.14) que :

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = e(x)\mathbf{e}_3 \quad x \in \Omega,$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = b_1(x)\mathbf{e}_1 + b_2(x)\mathbf{e}_2 \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Remarquons aussi que

$$b(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|}\right), \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

La relation (2.12) : $\frac{\partial b_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_2} = 0$, permet de définir une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} &= -b_2(x), \\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_2} &= b_1(x),\end{aligned}$$

ou de manière équivalente

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{rot}(\varphi(x)\mathbf{e}_3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.18)$$

Ceci définit la fonction φ à une constante près. De plus φ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Afin de fixer la constante, nous imposons

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0. \quad (2.19)$$

La relation (2.13) nous permet de déduire que :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{b}(x)}{\mu}\right) = \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}(\varphi(x)\mathbf{e}_3)\right) = j(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2.20)$$

où $\mathbf{rot}$ désigne le rotationnel bidimensionnel, i.e $\mathbf{rot}(\mathbf{f}(x)) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)$.

Etant donné que $\mu = \mu_0$ dans Ω' , où μ_0 est la constante de perméabilité du vide, la relation (2.20) devient

$$-\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (2.21)$$

$$-\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}(\varphi(x))\mathbf{e}_3\right) = j(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.22)$$

Nous utilisons ensuite les équations (2.14) et (2.18) afin d'exprimer j en fonction de φ et nous obtenons :

$$\mathbf{rot}((i\omega\varphi + e)\mathbf{e}_3) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ce qui équivaut à $\frac{\partial}{\partial x_1}(i\omega\varphi + e) = \frac{\partial}{\partial x_2}(i\omega\varphi + e) = 0$, et donc

$$i\omega\varphi + e = C_k \quad \text{dans } \Omega_k, \quad (2.23)$$

où C_k est une constante sur chacun des domaines $\Omega_k, k = 0, 1, 2$.

L'hypothèse ($\mathcal{H}$) sur la densité de courant se traduit en équations par :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} j(x) dx &= 0, \\ \mathcal{J} &= \int_{\Omega_1} j(x) dx = - \int_{\Omega_2} j(x) dx.\end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte de la relation (2.23), nous obtenons :

$$C_0 = C_0(\varphi) = \frac{i\omega \int_{\Omega_0} \sigma(x) \varphi(x) dx}{\int_{\Omega_0} \sigma(x) dx}, \quad (2.24)$$

$$C_1 = C_1(\varphi) = \frac{\mathcal{J} + i\omega \int_{\Omega_1} \sigma(x) \varphi(x) dx}{\int_{\Omega_1} \sigma(x) dx}, \quad (2.25)$$

$$C_2 = C_2(\varphi) = \frac{-\mathcal{J} + i\omega \int_{\Omega_2} \sigma(x) \varphi(x) dx}{\int_{\Omega_2} \sigma(x) dx}. \quad (2.26)$$

En utilisant les relations (2.9) et (2.18), on montre encore que

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega. \quad (2.27)$$

Finalement, en regroupant les relations (2.21), (2.22), (2.23), (2.27) et (2.19), nous aboutissons à un problème bidimensionnel où ne figure plus que l'inconnue φ :

$$-\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (2.28)$$

$$- \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\varphi \mathbf{e}_3) \right) = \sigma(C_k(\varphi) - i\omega \varphi) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.29)$$

$$[\varphi] = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega, \quad (2.30)$$

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0, \quad (2.31)$$

où C_k est une constante sur chacune des composantes connexes de Ω , dont l'expression est donnée en (2.24), (2.25) et (2.26). Il nous reste à préciser le **comportement de φ à l'infini**. En utilisant la théorie du potentiel, nous vérifions que les relations (2.17), (2.18) et (2.28) impliquent que $\varphi(x) = O(\log \|x\|)$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$.

Plus précisément nous avons (cf [6]):

$$\varphi(x) = \gamma \log \|x\| + \beta + \psi(x) \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (2.32)$$

où γ et β sont deux constantes complexes et ψ vérifie les relations suivantes:

$$\psi(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

$$\|\nabla \psi(x)\| = O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

De plus, nous pouvons montrer que $\gamma = 0$ dans la relation (2.32).

En effet, soit $R > 0$ un nombre suffisamment grand pour que la relation $\bar{\Omega} \subset B_R$ soit satisfaite (B_R désignant la boule unité de centre O et de rayon R). Les relations (2.33) et (2.34) signifient qu'il existe une constante C telle que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| \geq R, \quad (2.35)$$

$$\|\nabla \psi(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| \geq R. \quad (2.36)$$

Soit $r > R$, nous intégrons les équations (2.28) et (2.29) sur B_r , en tenant compte de (2.30) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{e}_3) \right) dx &= -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega' \cap B_r} \Delta \varphi dx + \sum_{k=0}^2 \int_{\Omega_k} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{e}_3) \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^2 \int_{\Omega_k} (\sigma C_k - i\omega \sigma \varphi) dx = 0. \end{aligned}$$

A l'aide de la formule de Green, nous en déduisons que

$$\int_{\partial B_r} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0. \quad (2.37)$$

D'autre part, les relations (2.32) et (2.36) impliquent que

$$\int_{\partial B_r} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{2\pi}{\mu_0} \gamma + \frac{1}{\mu_0} g(r), \quad (2.38)$$

avec $|g(r)| \leq \frac{C}{r}$.

Enfin, en combinant les relations (2.37) et (2.38) et en prenant r suffisamment grand, nous concluons que $\gamma = 0$.

Pour terminer la modélisation, nous nous penchons à nouveau sur les propriétés électromagnétiques des matériaux considérés.

La **conductivité électrique** σ d'un métal est une fonction qui dépend essentiellement de la température. Ainsi, dans la pièce chauffée Ω_0 il est nécessaire de tenir compte de cette dépendance. Par contre, nous pouvons supposer que les inducteurs sont maintenus à une température constante. Nous considérons donc une conductivité électrique σ ayant la forme suivante :

$$\sigma = \sigma(\theta) \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.39)$$

$$\sigma = \sigma_k = \text{cste} \quad \text{dans } \Omega_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.40)$$

Nous notons par F_1 l'ensemble des fonctions réelles positives, continues et bornées inférieurement et supérieurement :

$$F_1 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists m_1, m_2 > 0 \text{ tq } m_1 \leq f(s) \leq m_2 \forall s \in \mathbb{R}\}. \quad (2.41)$$

Nous supposons que σ est une fonction qui dépend continûment de la température pour le matériaux Ω_0 et qu'elle est bornée. En d'autres termes $\sigma \in F_1$ et nous notons par $m_1 = \alpha_1$ et $m_2 = \alpha_2$ la valeur des coefficients avec lesquels σ vérifie la relation (2.41).

Nous supposons que la **perméabilité magnétique** μ des conducteurs est une constante valant μ_0 . Cette hypothèse indique en particulier que nous ne traitons pas le cas de matériaux ferromagnétiques (pour ces derniers la perméabilité magnétique dépend de la température et du champ magnétique).

Afin de simplifier les écritures, nous introduisons des notations :

lorsque φ et θ sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, nous posons :

$$I_0(\varphi, \theta) = \frac{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta) \varphi}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta)}, \quad (2.42)$$

$$G(\varphi, \theta) = \sigma(\theta) (\varphi - I_0(\varphi, \theta)), \quad (2.43)$$

$$I_k(\varphi) = \frac{\int_{\Omega_k} \varphi}{|\Omega_k|}, \quad k = 1, 2, \quad (2.44)$$

$$J_0 = 0, \quad (2.45)$$

$$J_k = \frac{\mu_0 (-1)^{k+1} \mathcal{J}}{|\Omega_k|}, \quad k = 1, 2, \quad (2.46)$$

$$J_{ind} = J_k, \quad \text{dans } \Omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.47)$$

avec la notation $|\Omega_k| = \text{mes}(\Omega_k)$.

Finalement, nous énonçons le **problème électromagnétique** de la manière suivante :

Problème 2.1 *Etant donné $\theta : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ assez régulière, on cherche $\varphi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que :*

$$-\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (2.48)$$

$$-\Delta \varphi + i\omega \mu_0 G(\varphi, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.49)$$

$$-\Delta \varphi + i\omega \mu_0 \sigma_k (\varphi - I_k(\varphi)) = J_k \quad \text{dans } \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (2.50)$$

$$\varphi(x) = \beta + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.51)$$

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x) dx = 0. \quad (2.52)$$

2.1.3 Modélisation de la thermique

Les phénomènes thermiques à l'intérieur d'un solide sont décrits par l'équation de diffusion de la chaleur :

$$\text{div}(\lambda(\theta) \nabla \theta) + P = \rho C_p(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (2.53)$$

où $\lambda(\theta)$ est la conductibilité thermique, $\rho C_p(\theta)$ la chaleur spécifique et P la densité de puissance apportée au sein du solide.

Les **conditions aux limites** à prendre en compte dépendent du processus de chauffage considéré : par exemple dans la trempe au défilé (c.f fig. 2.1) il faut tenir compte de l'effet de la douche de refroidissement. D'autres phénomènes peuvent être pris en compte comme l'extraction de chaleur en surface par convection ou l'effet de radiation (c.f [7]). Nous simplifierons ce problème en considérant uniquement des conditions aux limites de type Dirichlet homogène (température nulle imposée sur le bord).

Dans le cas du traitement thermique par induction, le terme de source provient essentiellement de l'effet joule causé par les courants induits. Nous allons à présent établir l'expression de cette puissance thermique dissipée dans la pièce. D'après la loi d'Ohm on a

$$P(x, t) = \sigma^{-1}(\theta(x, t)) |j(x) e^{i\omega t}|^2. \quad (2.54)$$

Comme la pulsation ω est relativement élevée, nous considérons que pendant un laps de temps d'une durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$, le terme $\sigma^{-1}(\theta(x, t))$ est constant par rapport à t . Ainsi, nous remplaçons l'expression (2.54) par

$$P(x, t) = \frac{\omega}{2\pi} \sigma^{-1}(\theta(x, t)) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |j(x) e^{i\omega t}|^2 dt. \quad (2.55)$$

Un calcul simple permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{\omega^3}{2} \sigma(\theta(x, t)) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |(I_0(\theta, \varphi) - \varphi(x)) i e^{i\omega t}|^2 dt \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sigma(\theta(x, t)) |I_0(\theta, \varphi) - \varphi(x)|^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dans les métaux la conductivité électrique est une fonction décroissante de la température et ainsi il semble raisonnable de pouvoir atteindre un **état thermique stationnaire** (i.e $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$) lorsque nous imposons $\theta = 0$ sur $\partial\Omega_0$.

C'est cet état d'équilibre que nous recherchons et nous considérerons donc l'équation (2.53) sous sa forme stationnaire. Dans la suite, nous considérerons que la conductivité thermique est une constante valant 1.

Ainsi, le **problème thermique** s'énonce comme suit :

Problème 2.2 *Etant donné $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ assez régulière, on cherche $\theta \in H^2(\Omega_0)$ tq :*

$$\begin{aligned} -\Delta \theta &= \frac{\omega^2}{2} \sigma(\theta) |I_0(\varphi, \theta) - \varphi|^2 && \text{dans } \Omega_0, \\ \theta &= 0 && \text{sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

où Γ_0 est le bord de Ω_0 .

2.1.4 Problème complet

Nous dirons qu'un couple $(\varphi, \theta) \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \times H^2(\Omega_0)$ est solution du **problème stationnaire de chauffage par induction** s'il vérifie à la fois le problème 2.1 et le problème 2.2, i.e

$$-\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (2.57)$$

$$-\Delta \varphi + i\omega\mu_0 G(\varphi, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.58)$$

$$-\Delta \varphi + i\omega\mu_0 \sigma_k (\varphi - I_k(\varphi)) = J_k \quad \text{dans } \Omega_k ; k = 1, 2, \quad (2.59)$$

$$\varphi(x) = \beta + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.60)$$

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x) dx = 0. \quad (2.61)$$

$$-\Delta \theta = \frac{\omega^2}{2} \sigma(\theta) |I_0(\varphi, \theta) - \varphi|^2 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.62)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (2.63)$$

2.2 Un théorème d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre nous cherchons à déterminer si le problème (2.57)-(2.63) admet une solution et si celle-ci est unique.

Pour cela, nous montrons que ce problème de chauffage par induction est équivalent à la recherche d'un point fixe pour un opérateur T que nous introduisons préalablement. Avec cette nouvelle formulation, nous montrons qu'il y a effectivement existence d'une solution. Notre démonstration consiste à prouver qu'un théorème de point fixe de Schauder s'applique.

Nous montrons de plus qu'en rajoutant certaines hypothèses sur les données du problème, il y a unicité de la solution.

Nous utiliserons certaines notations et résultats très classiques d'analyse fonctionnelle, que nous rappelons brièvement.

2.2.1 Notations et généralités.

Dans cette partie D désigne toujours un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière est régulière.

On note par $W^{m,p}(D)$, $H^m(D)$, $L^p(D)$ les **espaces de Sobolev** munis de leurs normes $\|\cdot\|_{m,p,D}$, $\|\cdot\|_{p,D}$, $\|\cdot\|_{0,p,D}$ et de leurs semi-normes $|\cdot|_{m,p,D}$, $|\cdot|_{p,D}$, $|\cdot|_{0,p,D} = \|\cdot\|_{0,p,D}$.

D'après le théorème de Rellich-Kondrakov (c.f [2] page 169), on a les inclusions compactes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{si } p < N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(D) \subset L^q(D), \quad \forall q \in [1, p^*] \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ \text{si } p = N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(D) \subset L^q(D), \quad \forall q \in [1, \infty[, \\ \text{si } p > N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(D) \subset \mathcal{C}(\bar{D}). \end{aligned}$$

Nous nous servons aussi de l'**espace de Sobolev à poids** $W_0^1(\mathbb{R}^2)$. Pour la définition et les propriétés utiles de cet espace, nous renvoyons au paragraphe 1.2 de ce document ou à [8].

Soit F un opérateur qui agit entre deux espaces de Banach X et Y . On dit que F est dérivable au sens de Fréchet en $x \in X$ s'il existe $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|h\|_X \leq \varepsilon} \frac{1}{\|h\|_X} \|F(x+h) - F(x) - F'(x)(h)\|_Y = 0.$$

L'opérateur $F'(x)$ est appelé **dérivée de Fréchet** de F en x .

Pour des détails concernant le calcul différentiel, nous renvoyons au livre [3].

Nous utiliserons aussi la formule des accroissements finis de Lagrange (cf [11] page 402) qui s'énonce comme suit : Si F est un opérateur continûment différentiable dans un voisinage S du point x_0 , alors

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + s(x - x_0)) ds (x - x_0). \quad (2.64)$$

Soit $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **opérateur de Nemytski** associé à f , et on note par F l'opérateur défini par $u \rightarrow F(u)$, $F(u)(x) = f(x, u(x))$, $x \in \bar{D}$, où u est une fonction définie sur $\bar{D}$.

F est continu de $\mathcal{C}(\bar{D})$ dans $\mathcal{C}(\bar{D})$. De plus si f est continûment dérivable par rapport à la deuxième variable (notée t) alors F est dérivable au sens de Fréchet et on a (cf [11] page 401) :

$$F'(u)(h)(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x))h(x), \quad x \in \bar{D}, \text{ où } h \in \mathcal{C}(\bar{D}) \text{ est quelconque.}$$

Enfin, nous utiliserons le **théorème de point fixe de Schauder**, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } T \text{ un opérateur qui applique une partie convexe fermée} \\ \text{bornée } A \text{ d'un espace de Banach } X \text{ dans elle même.} \\ \text{Si } T \text{ est compact sur } A, \text{ il a un point fixe dans } A. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Une démonstration de ce théorème est présentée dans [11] à la page 440. Nous introduisons enfin deux notations destinées à simplifier les écritures :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2) &= \left\{ v \in W_0^1(\mathbb{R}^2), \int_{\Omega_0} v(x)dx = 0 \right\}, \\ \hat{L}^2(\Omega) &= \left\{ v \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} v(x)dx = 0 \right\}, \end{aligned}$$

où Ω et Ω_0 désignent toujours les deux ouverts bornés du plan que nous avons introduit dans le paragraphe 2.1.2.

La première étape du travail mathématique que nous désirons effectuer dans ce chapitre consiste à reformuler le problème (2.57)-(2.63) en une recherche de point fixe. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

2.2.2 Nouvelle formulation du problème stationnaire de chauffage par induction.

Nous commençons par introduire un opérateur lié au problème électromagnétique. Rappelons que dans la partie modélisation nous avons établi la formulation forte du problème électromagnétique, qui s'énonce :

Problème 2.3

Pour $\theta \in L^2(\Omega_0)$ et $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ données, on cherche $\varphi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tq :

$$-\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (2.66)$$

$$-\Delta\varphi + i\omega\mu_0 G(\varphi, \theta) = f \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.67)$$

$$-\Delta\varphi + i\omega\mu_0\sigma_k(\varphi - I_k(\varphi)) = f \quad \text{dans } \Omega_k ; \quad k = 1, 2, \quad (2.68)$$

$$\varphi(x) = \beta + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.69)$$

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x)dx = 0. \quad (2.70)$$

Supposons que φ soit une solution du problème 2.3, ce qui signifie en particulier que $\varphi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$. Nous multiplions les équations (2.66) à (2.68) par une fonction ψ^* suffisamment régulière et nous intégrons par partie. Nous obtenons

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} f\psi^* \quad \forall \psi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2),$$

avec

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi \nabla \psi^* + i\omega\mu_0 \left\{ \sum_{k=1}^2 \sigma_k \left\{ \int_{\Omega_k} (\varphi - I_k(\varphi)) \psi^* \right\} + \int_{\Omega_0} G(\varphi, \theta) \psi^* \right\} \quad (2.71)$$

En conséquence, nous considérons le problème suivant :

Problème 2.4

Pour $\theta \in L^2(\Omega_0)$ et $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ données, on cherche $\varphi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} f \psi^* \quad \forall \psi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.72)$$

où $a(.,.)$ est la forme bilinéaire définie en (2.71).

Ce problème est une formulation variationnelle du problème 2.3 et il est équivalent à ce dernier. En effet, supposons que $\varphi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$ soit une solution de (2.72). On définit $g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$g = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega' \\ -i\omega\mu_0\sigma_k(\varphi - I_k(\varphi)) & \text{dans } \Omega_k, k = 1, 2 \\ -i\omega\mu_0 G(\varphi, \theta) & \text{dans } \Omega_0. \end{cases}$$

On vérifie alors que l'équation $\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi \nabla \psi = \int_{\mathbb{R}^2} g \psi$ est satisfaite pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. En d'autre terme $-\Delta \varphi = g$ au sens des distributions. Les théorèmes de régularité elliptique impliquent alors que $\varphi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$. Ainsi φ est aussi solution du problème 2.3.

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.1 La forme bilinéaire $a(.,.)$ définie en (2.71) est continue et coercive sur $\tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$:

$$|a(\varphi, \psi)| \leq C_1 \|\varphi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)} \|\psi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)} \quad \forall \varphi, \psi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.73)$$

$$\operatorname{Re} a(\varphi, \varphi) \geq C_2 \|\varphi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}^2 \quad \forall \varphi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.74)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de θ .

Preuve.

La preuve de ce lemme est assez immédiate si l'on se rappelle des propriétés de l'espace $\tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$.

Soit $\varphi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$, on constate que les expressions $\int_{\Omega_k} (\varphi - I_k(\varphi)) \varphi^*$ et $\int_{\Omega_0} G(\varphi, \theta) \varphi^*$ ont une partie imaginaire nulle. Ceci implique que

$$\operatorname{Re} a(\varphi, \varphi) = \|\nabla \varphi\|_{0, \mathbb{R}^2}^2 \geq C_2 \|\varphi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}^2,$$

où C_2 est une constante d'équivalence entre la norme du gradient et la norme $\|\cdot\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}$. En conséquence la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur $\tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$. Pour la continuité de $a(.,.)$, une majoration directe montre le résultat annoncé. ■

Il est clair que la forme linéaire $b(\psi) = \int_{\Omega} f(x) \psi^*(x) dx$ est continue sur $\tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, une conséquence du lemme 2.1 est que pour tout $\theta \in L^2(\Omega_0)$, il existe une unique solution au

problème 2.3. Ceci nous permet de définir deux **opérateurs liés à l'électromagnétisme** $\mathcal{T}_1$ et T_1 par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 : L^2(\Omega_0) \times \hat{L}^2(\Omega) &\rightarrow H^1(\Omega_0) \\ (\theta, f) &\rightarrow \mathcal{T}_1(\theta, f) = \varphi|_{\Omega_0}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

où φ est solution du problème électromagnétique 2.4.

$$\begin{aligned} T_1 : L^2(\Omega_0) &\rightarrow H^1(\Omega_0) \\ \theta &\rightarrow T_1(\theta) = \mathcal{T}_1(\theta, J_{ind}), \end{aligned} \quad (2.76)$$

avec J_{ind} défini en (2.47).

Nous procédons de la même manière pour définir un opérateur lié au problème thermique. Rappelons le problème en question :

Problème 2.5

Pour $\varphi \in H^1(\Omega_0)$ et $v \in L^2(\Omega_0)$ données, on cherche $\theta \in H^2(\Omega_0)$ tq :

$$\begin{aligned} -\Delta\theta &= \frac{\omega^2}{2}\sigma(v)|I_0(\varphi, v) - \varphi|^2 && \text{dans } \Omega_0, \\ \theta &= 0 && \text{sur } \Gamma_0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Pour l'existence et l'unicité d'une solution de ce problème, il suffit ici de constater que la fonction $x \rightarrow \frac{\omega^2}{2}\sigma(v(x))|I_0(\varphi, v) - \varphi(x)|^2$ appartient à $L^2(\Omega_0)$. Ainsi, nous définissons l'**opérateur lié à la thermique** T_2 par :

$$\begin{aligned} T_2 : H^1(\Omega_0) \times L^2(\Omega_0) &\rightarrow H^2(\Omega_0) \\ (\varphi, v) &\rightarrow T_2(\varphi, v) = \theta, \end{aligned} \quad (2.78)$$

où θ est la solution du problème 2.5.

Afin de pouvoir manipuler plus facilement l'opérateur T_2 , nous définissons l'opérateur $\hat{T}_2 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_0), H^2(\Omega_0))$ par

$$\Delta\hat{T}_2(f) = f \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.79)$$

$$\hat{T}_2(f) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (2.80)$$

Ainsi, T_2 admet la décomposition suivante :

$$T_2(\varphi, v) = \hat{T}_2\left(\frac{\omega^2}{2}\sigma(v)|I_0(\varphi, v) - \varphi|^2\right). \quad (2.81)$$

Si nous réexaminons à présent le problème complet de chauffage (2.57)-(2.63), nous remarquons qu'il consiste à déterminer un couple

$(\varphi, \theta) \in \tilde{H}^1(\Omega_0) \times H^2(\Omega_0)$ tel que $\varphi = T_1(\theta)$ et $\theta = T_2(\varphi, \theta)$.

Nous définissons alors l'opérateur T :

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega_0) &\rightarrow H^2(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \\ \theta &\rightarrow T(\theta) = T_2(T_1(\theta), \theta). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Ainsi, le problème (2.57)-(2.63) revient à chercher un point fixe de T .

Ceci constitue la première étape de notre étude. nous allons maintenant montrer que l'opérateur T vérifie les hypothèses du théorème de Schauder (sous la forme que nous avons énoncée en (2.65)) et donc qu'il possède un point fixe.

Avant cela, nous introduisons encore des **opérateurs annexes** destinés à simplifier les notations.

Nous définissons la fonction réelle δ par

$$\delta(x) = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma}(x), \quad (2.83)$$

où σ représente la conductivité électrique du matériau occupant Ω_0 en fonction de la température. Ainsi, nous vérifions que δ appartient à l'ensemble F_1 , et nous notons par $m_1 = a_1, m_2 = a_2$, les paramètres avec lesquels δ vérifie la relation (2.41).

Soit $g \in F_1$, nous posons

$$\begin{aligned} G_{\sigma,g} : H^1(\Omega_0) \times L^2(\Omega_0) &\rightarrow L^2(\Omega_0) \\ (\varphi, \theta) &\rightarrow G_{\sigma,g}(\varphi, \theta) = g(\theta) \left(\varphi - \frac{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta) \varphi}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta)} \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Avec cette notation, nous avons $G(\varphi, \theta) = G_{\sigma,\sigma}(\varphi, \theta)$, où G est l'opérateur défini en (2.43). Remarquons aussi que le membre de droite de l'équation (2.77) est exactement $|G_{\sigma,\delta}(\varphi, v)|^2$. Ainsi, l'identité (2.81) équivaut à

$$T_2(\varphi, v) = \hat{T}_2 \circ |G_{\sigma,\delta}(\varphi, v)|^2. \quad (2.85)$$

2.2.3 Un résultat d'existence.

Pour des raisons techniques qui se clarifieront dans la suite, nous cherchons un point fixe de l'opérateur T , dans l'espace $W^{1,4}(\Omega_0)$.

Avant d'obtenir un théorème d'existence, nous établissons une série de résultats secondaires. Ces derniers n'ont que peu d'intérêt en eux-mêmes et par conséquent nous n'avons pas cherché à les optimiser.

Lemme 2.2 $\mathcal{T}_1$ vérifie les Propriétés de continuité suivantes :

- i) Pour tout $\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$, l'opérateur $\mathcal{T}_1(\theta, \cdot)$ est linéaire
et il existe une constante K indépendante de θ et de f telle que
 $\|\mathcal{T}_1(\theta, f)\|_{1,\Omega_0} \leq K \|f\|_{0,\Omega} \quad \forall f \in \hat{L}^2(\Omega)$.
- ii) Pour tout $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ donnée, l'opérateur $\mathcal{T}_1(\cdot, f)$ est continu sur $W^{1,4}(\Omega_0)$
et si pour $\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$ la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,4}(\Omega_0)$ est telle que
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta - \theta_n\|_{1,4,\Omega_0} = 0$, alors il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ indépendante de f
telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ et $\|\mathcal{T}_1(\theta, f) - \mathcal{T}_1(\theta_n, f)\|_{1,\Omega_0} \leq \gamma_n \|f\|_{0,\Omega}$.
- iii) $\mathcal{T}_1 : W^{1,4}(\Omega_0) \times \hat{L}^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega_0)$ est continu.

Preuve.

i) Soit θ et f données, on pose $\varphi|_{\Omega_0} = \mathcal{T}_1(\theta, f)$. Ceci signifie (cf (2.75)) que $\varphi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$ est la solution du problème variationnel 2.4, qui s'écrit

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} f \psi^*, \quad \forall \psi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2).$$

Nous savons, grâce au lemme 2.1 qu'il existe une constante C positive et indépendante de θ et de f telle que

$$C \|\varphi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \operatorname{Re} a(\varphi, \varphi) = |\operatorname{Re} b(\varphi)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}.$$

On obtient ainsi l'inégalité $\|\varphi\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{C} \|f\|_{0,\Omega}$, qui implique aussi que

$$\|\mathcal{T}_1(\theta, f)\|_{1,\Omega_0} \leq K \|f\|_{0,\Omega}, \text{ où } K = \frac{1}{C}.$$

ii) Soit $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ et $\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$, on considère une suite $(\theta_n)_n \subset W^{1,4}(\Omega_0)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_n - \theta\|_{1,4,\Omega_0} = 0. \quad (2.86)$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Omega_0} &= \mathcal{T}_1(\theta, f), \\ \varphi_n|_{\Omega_0} &= \mathcal{T}_1(\theta_n, f), \\ \psi_n &= \varphi - \varphi_n. \end{aligned}$$

La fonction $\psi_n \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie alors la relation suivante

$$a_n(\psi_n, \psi) = L_n(\psi) \quad \forall \psi \in \tilde{W}_0^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.87)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} a_n(\psi_n, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \psi_n \nabla \psi^* + i\omega\mu_0 \left\{ \sum_{k=1}^2 \sigma_k \int_{\Omega_k} (\psi_n - I_k(\psi_n)) \psi^* - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n) \psi_n \psi^* - \frac{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n) \psi_n \int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n) \psi^*}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n)} \right\}, \\ L_n(\psi) &= i\omega\mu_0 \left\{ - \int_{\Omega_0} r(\theta, \theta_n) \varphi \psi^* + \frac{\int_{\Omega_0} r(\theta, \theta_n) \varphi \int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n) \psi^*}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n)} + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega_0} \sigma(\theta) \varphi \left(\frac{\int_{\Omega_0} r(\theta, \theta_n) \psi^*}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta)} - s(\theta, \theta_n) \int_{\Omega_0} r(\theta, \theta_n) \int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n) \psi^* \right) \right\}, \\ r(\theta, \theta_n) &= \sigma(\theta) - \sigma(\theta_n), \\ s(\theta, \theta_n) &= \frac{1}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta) \int_{\Omega_0} \sigma(\theta_n)}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir certaines propriétés des applications a_n et L_n , qui ajoutées à la relation (2.87) permettront de conclure.

• On vérifie que

$$\operatorname{Re} a_n(\psi_n, \psi_n) = |\psi_n|_{1,\mathbb{R}^2}^2 \geq C_1 \|\psi_n\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (2.88)$$

où C_1 est une constante positive indépendante de θ , θ_n et f .

• En utilisant l'inégalité de Hölder et le théorème de Rellich-Kondrakov on obtient :

$$\begin{aligned} |L_n(\psi_n)| &\leq \omega\mu_0\|\psi_n\|_{0,\Omega_0} \left(\|r(\theta, \theta_n)\|_{0,4,\Omega_0}\|\varphi\|_{0,4,\Omega_0} + \right. \\ &\quad \left. \|r(\theta, \theta_n)\|_{0,\Omega_0}\|\varphi\|_{0,\Omega_0} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(2 + \alpha_2)|\Omega_0|^{-1/2} \right) \\ &\leq K_2\omega\mu_0\|f\|_{0,\Omega}\|r(\theta, \theta_n)\|_{0,4,\Omega_0}\|\psi_n\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

où K_2 est une constante indépendante de θ et de f .

En posant $\gamma_n = K_2\omega\mu_0\|r(\theta, \theta_n)\|_{0,4,\Omega_0}$, on définit une suite réelle et indépendante de f . De plus, il est bien clair que l'opérateur de Neymitski

$\Sigma : \theta \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_0) \rightarrow \Sigma(\theta) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_0)$, $\Sigma(\theta)(x) = \sigma(\theta(x))$, $x \in \Omega_0$ est continu.

Ainsi en utilisant la relation (2.86), nous vérifions que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Enfin les relations (2.88) et (2.89) impliquent que $\|\psi_n\|_{W_0^1(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\gamma_n}{C_1}\|f\|_{0,\Omega}$, ce qui termine la preuve.

iii) Soient $(\theta, f) \in W^{1,4}(\Omega_0) \times \hat{L}^2(\Omega)$ et $(\theta_n, f_n)_n \subset W^{1,4}(\Omega_0) \times \hat{L}^2(\Omega)$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta - \theta_n\|_{1,4,\Omega_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{0,\Omega_0} = 0$. On a

$$\|\mathcal{T}_1(\theta, f) - \mathcal{T}_1(\theta_n, f_n)\|_{1,\Omega_0} \leq \|\mathcal{T}_1(\theta, f) - \mathcal{T}_1(\theta_n, f)\|_{1,\Omega_0} + \|\mathcal{T}_1(\theta_n, f - f_n)\|_{1,\Omega_0},$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_1(\theta, f) - \mathcal{T}_1(\theta_n, f_n)\|_{1,\Omega_0} = 0$, en utilisant les points i) et ii). ■

Lemme 2.3 *L'opérateur $G_{\sigma,g}$ défini en (2.84) est continu de $W^{1,4}(\Omega_0) \times H^1(\Omega_0)$ dans $L^4(\Omega_0)$ et il existe une constante K indépendante de θ et de φ , telle que*

$$\|G_{\sigma,g}(\varphi, \theta)\|_{0,4,\Omega_0} \leq K\|\varphi\|_{0,4,\Omega_0}. \quad (2.90)$$

Ainsi, l'opérateur $T_2 : H^1(\Omega_0) \times W^{1,4}(\Omega_0) \rightarrow H^2(\Omega_0)$ défini en (2.78) est continu. De plus, il existe une constante K telle que

$$\|T_2(\varphi, v)\|_{2,\Omega_0} \leq K\|\varphi\|_{1,\Omega_0}^2 \quad \forall (\varphi, v) \in H^1(\Omega_0) \times W^{1,4}(\Omega_0). \quad (2.91)$$

Preuve.

La majoration (2.90) se montre immédiatement en utilisant l'inégalité de Hölder. Pour montrer la continuité de $G_{\sigma,g}$ en un point $(\varphi, \theta) \in \tilde{H}^1(\Omega_0) \times W^{1,4}(\Omega_0)$, on considère une suite $(\varphi_n, \theta_n)_n \subset \tilde{H}^1(\Omega_0) \times W^{1,4}(\Omega_0)$ qui converge vers ce point. En utilisant l'inégalité de Hölder on montre ensuite que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_{\sigma,g}(\varphi_n, \theta_n) - G_{\sigma,g}(\varphi, \theta)\|_{0,4,\Omega_0} = 0.$$

En se servant de l'identité (2.85), la continuité de T_2 apparaît comme une conséquence de (2.90) où g est remplacée par la fonction δ définie en (2.83). De plus on obtient la majoration (2.91). ■

Théorème 2.1 *Il existe au moins une solution au problème (2.57)-(2.63) de chauffage par induction.*

Preuve.

Les lemmes 2.2 et 2.3 montrent que $T : W^{1,4}(\Omega_0) \rightarrow H^2(\Omega_0)$ est continu et qu'il existe une constante K indépendante de θ telle que

$$\|T(\theta)\|_{2,\Omega_0} \leq K\mathcal{J}^2. \quad (2.92)$$

Ceci signifie qu'il existe une constante K' telle que l'opérateur T applique la boule $B(0, K'\mathcal{J}^2)$ de l'espace $W^{1,4}(\Omega_0)$ dans elle-même.

D'autre part l'injection $H^2(\Omega_0) \rightarrow W^{1,4}(\Omega_0)$ étant compact, la relation (2.92) implique que l'opérateur $T : W^{1,4}(\Omega_0) \rightarrow W^{1,4}(\Omega_0)$ est compact. Ainsi, nous pouvons appliquer un théorème de Schauder énoncé en (2.65) et affirmer que T admet au moins un point fixe. Il en résulte que le couple $(\theta, \varphi = T_1(\theta))$ est solution du système (2.57)-(2.63). ■

2.2.4 Un théorème d'unicité

Nous notons par F_2 le sous ensemble de F_1 (cf (2.41)) constitué des fonctions continûment dérivables, dont la dérivée est bornée et lipchitzienne. En d'autres termes, nous posons :

$$F_2 = \left\{ f \in F_1, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists m_3, m_4 > 0 \text{ tels que } |f'(s)| \leq m_3 \text{ et } |f'(s) - f'(t)| \leq m_4|s - t| \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.93)$$

Nous supposons à présent que la fonction σ qui représente la conductivité électrique en fonction de la température pour le matériau Ω_0 , est une fonction appartenant à l'ensemble F_2 . C'est à dire que, en plus de vérifier la relation (2.41) avec $m_1 = \alpha_1, m_2 = \alpha_2$, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, elle vérifie aussi (2.93) avec $m_3 = \beta$ et $m_4 = l_1$ donnés.

Cette hypothèse implique que la fonction δ définie en (2.83) appartient elle aussi à l'ensemble F_2 . Nous notons par $m_3 = b, m_4 = l_2$, les paramètres avec lesquels δ vérifie la relation (2.93).

Sous ces conditions, nous allons montrer que l'opérateur T est continûment dérivable au sens de Fréchet. De plus, nous montrerons que si le courant total circulant dans l'inducteur est suffisamment faible alors T est contractant. Ceci implique alors que le problème (2.57)-(2.63) admet une unique solution.

Nous établissons une série de lemmes afin de calculer la dérivée de T et de majorer sa norme.

Lemme 2.4 *Soit $g \in F_2$, on a les propriétés suivantes :*

i) *L'opérateur $G_{\sigma,g}$ (cf (2.84)) est continûment dérivable de $H^1(\Omega_0) \times W^{1,4}(\Omega_0)$ dans $L^4(\Omega_0)$.*

ii) *Il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de φ et de θ telles que*

$$\left\| \frac{\partial G_{\sigma,g}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \right\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0), L^4(\Omega_0))} \leq C_1,$$

$$\left\| \frac{\partial G_{\sigma,g}}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right\|_{\mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), L^4(\Omega_0))} \leq C_2 \|\varphi\|_{1,\Omega_0}.$$

iii) Soit $\varphi \in H^1(\Omega_0)$ donnée, il existe une constante L indépendante de φ telle que

$$\left\| \frac{\partial G_{\sigma,g}}{\partial \theta}(\varphi, \theta_1) - \frac{\partial G_{\sigma,g}}{\partial \theta}(\varphi, \theta_2) \right\|_{\mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), L^4(\Omega_0))} \leq L \|\varphi\|_{1,\Omega_0} \|\theta_1 - \theta_2\|_{1,4,\Omega_0},$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in W^{1,4}(\Omega_0).$$

Preuve.

i) Par composition on montre que $G_{\sigma,g}$ est dérivable et on obtient :

$$\frac{\partial G_{\sigma,g}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta)(\delta\varphi) = G_{\sigma,g}(\delta\varphi, \theta), \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\sigma,g}}{\partial \theta}(\varphi, \theta)(\delta\theta) &= -g(\theta) \frac{\int_{\Omega_0} \sigma'(\theta) \varphi \delta\theta}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta)} - g'(\theta) \delta\theta \frac{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta) \varphi}{\int_{\Omega_0} \sigma(\theta)} \\ &\quad + \frac{g(\theta)}{\left(\int_{\Omega_0} \sigma(\theta)\right)^2} \int_{\Omega_0} \sigma'(\theta) \delta\theta \int_{\Omega_0} \sigma(\theta) \varphi \\ &\quad + g'(\theta) \varphi \delta\theta. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Comme les fonctions g et σ appartiennent à F_2 , on vérifie que les dérivées partielles (2.94) et (2.95) sont continues.

ii) et iii) Les majorations s'obtiennent à partir des expressions (2.94) et (2.95) en utilisant l'inégalité de Hölder. ■

Ce résultat nous montre que l'opérateur T_2 (cf (2.78)) est continûment dérivable de $H^1(\Omega_0) \times W^{1,4}(\Omega_0)$ dans $H^2(\Omega_0)$. De plus, il existe une constante K_2 indépendante de φ et de θ telle que

$$\left\| \frac{\partial T_2}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \right\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}^1(\Omega_0), H^2(\Omega_0))} \leq K_2 \|\varphi\|_{1,\Omega_0}, \quad (2.96)$$

$$\left\| \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right\|_{\mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), H^2(\Omega_0))} \leq K_2 \|\varphi\|_{1,\Omega_0}^2. \quad (2.97)$$

En effet, rappelons l'identité (2.85) : $T_2(\varphi, v) = \hat{T}_2(\varphi, v) \circ |G_{\sigma,\delta}(\varphi, v)|^2$. Comme l'opérateur $\hat{T}_2$ (cf (2.79) et (2.80)) est linéaire et continu de $L^2(\Omega_0)$ dans $H^2(\Omega_0)$, la continuité de T_2 se déduit du lemme 2.4. Il en est de même pour les majorations (2.96) et (2.97). Pour l'opérateur T_1 (cf (2.75)) nous avons un résultat analogue :

Lemme 2.5

T_1 est continûment dérivable de $W^{1,4}(\Omega_0)$ dans $H^1(\Omega_0)$ et il existe une constante K_1 indépendante de θ telle que

$$\|T_1'(\theta)\|_{\mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), H^1(\Omega_0))} \leq K_1 \mathcal{J}. \quad (2.98)$$

Preuve. Soit $\theta, \delta\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$, nous définissons $g(\theta, \delta\theta)$ dans Ω par

$$g(\theta, \delta\theta) = \begin{cases} -i\omega\mu_0 \frac{\partial G}{\partial \theta}(T_1(\theta), \theta)(\delta\theta) & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \Omega_k, \ k = 1, 2. \end{cases}$$

On vérifie que $g(\theta, \delta\theta) \in \hat{L}^2(\Omega)$ et nous posons $\psi = \mathcal{T}_1(\theta, g(\theta, \delta\theta))$. Ceci signifie que $\psi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 && \text{dans } \Omega', \\ -\Delta\psi + i\omega\mu_0 G(\psi, \theta) &= -i\omega\mu_0 \frac{\partial G}{\partial \theta}(T_1(\theta), \theta)(\delta\theta) && \text{dans } \Omega_0, \\ -\Delta\psi + i\omega\mu_0 \sigma_k(\psi - I_k(\psi)) &= 0 && \text{dans } \Omega_k, \quad k = 1, 2, \\ \psi(x) &= \beta + O\left(\frac{1}{|x|}\right) && \text{quand } |x| \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega_0} \psi(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Nous définissons l'opérateur A , qui pour $\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$ associe $A(\theta) : W^{1,4}(\Omega_0) \rightarrow H^1(\Omega_0)$ défini par

$$A(\theta)(\delta\theta) = \psi(\theta, \delta\theta). \quad (2.99)$$

Nous vérifions aisément que $A(\theta) \in \mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), H^1(\Omega_0))$.

Montrons à présent la continuité de A : soit $\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$ donné et une suite

$(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,4}(\Omega_0)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta - \theta_n\|_{1,4,\Omega_0} = 0$.

On pose $\varepsilon_n(\delta\theta) = A(\theta_n)(\delta\theta) - A(\theta)(\delta\theta)$ et on vérifie que

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\delta\theta) &= \mathcal{T}_1(\theta_n, g(\theta_n, \delta\theta)) - \mathcal{T}_1(\theta, g(\theta, \delta\theta)) \\ &= \mathcal{T}_1(\theta, g(\theta_n, \delta\theta) - g(\theta, \delta\theta)) + \mathcal{T}_1(\theta_n, g(\theta_n, \delta\theta)) - \mathcal{T}_1(\theta, g(\theta_n, \delta\theta)). \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant les lemmes 2.4 et 2.2, nous vérifions que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sup_{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0} \leq \varrho} \|\varepsilon_n(\delta\theta)\|_{1,\Omega_0} = 0, \quad (2.100)$$

et donc $A : W^{1,4}(\Omega_0) \rightarrow \mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), H^1(\Omega_0))$ est continu.

Montrons maintenant que A est la dérivée de T_1 .

Soit $\theta, \delta\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$, nous posons

$$T_1(\theta + \delta\theta) = \tilde{\varphi}|_{\Omega_0}, \quad (2.101)$$

$$T_1(\theta) = \varphi|_{\Omega_0}, \quad (2.102)$$

$$A(\theta)(\delta\theta) = \psi|_{\Omega_0}, \quad (2.103)$$

$$\chi = \tilde{\varphi} - \varphi - \psi. \quad (2.104)$$

Ainsi χ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 0 && \text{dans } \Omega', \\ -\Delta\chi + i\omega\mu_0 \left(G(\tilde{\varphi}, \theta + \delta\theta) - G(\varphi, \theta) \right. \\ &\quad \left. - G(\psi, \theta) - \frac{\partial G}{\partial \theta}(\varphi, \theta)(\delta\theta) \right) &= 0 && \text{dans } \Omega_0, \\ -\Delta\chi + i\omega\mu_0 \sigma_k(\chi - I_k(\chi)) &= 0 && \text{dans } \Omega_k, \quad k = 1, 2, \\ \chi(x) &= \beta + O\left(\frac{1}{|x|}\right) && \text{quand } |x| \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega_0} \chi(x) dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Posons encore $W(\theta, \delta\theta) = G(\tilde{\varphi}, \theta + \delta\theta) - G(\tilde{\varphi}, \theta) - \frac{\partial G}{\partial \theta}(\tilde{\varphi}, \theta)(\delta\theta)$.

On vérifie avec la formule des accroissements finis de Lagrange (cf (2.64)) que

$$W(\theta, \delta\theta) = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial G}{\partial \theta}(T_1(\theta + s\delta\theta), \theta + s\delta\theta) - \frac{\partial G}{\partial \theta}(T_1(\theta + \delta\theta), \theta) \right\} ds(\delta\theta),$$

et donc

$$\|W(\theta, \delta\theta)\|_{0,\Omega_0} \leq L \|T_1(\theta + \delta\theta)\|_{1,\Omega_0} \|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}^2, \quad (2.106)$$

où L est une constante donnée par lemme 2.4. En conséquence

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0} \leq \epsilon} \frac{\|W(\theta, \delta\theta)\|_{0,\Omega_0}}{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}} = 0. \quad (2.107)$$

Nous définissons maintenant $R(\theta, \delta\theta)$ dans Ω par

$$R(\theta, \delta\theta) = \begin{cases} -i\omega\mu_0 \left(\frac{\partial G}{\partial \theta}(\tilde{\varphi}, \theta)(\delta\theta) - \frac{\partial G}{\partial \theta}(\varphi, \theta)(\delta\theta) - W(\theta, \delta\theta) \right) & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \Omega_k, \ k = 1, 2. \end{cases}$$

Ainsi nous avons

$$\chi(\theta, \delta\theta) = T_1(\theta, R(\theta, \delta\theta)). \quad (2.108)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta}(\tilde{\varphi}, \theta)(\delta\theta) - \frac{\partial G}{\partial \theta}(\varphi, \theta)(\delta\theta) \right\|_{0,\Omega_0} &= \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta}(\tilde{\varphi} - \varphi, \theta)(\delta\theta) \right\|_{0,\Omega_0} \\ &\leq C_2 \|T_1(\theta + \delta\theta) - T_1(\theta)\|_{1,\Omega_0} \|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

où C_2 est une constante donnée par le lemme 2.4. Il résulte alors de (2.109) et (2.107) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0} \leq \epsilon} \frac{\|R(\theta, \delta\theta)\|_{0,\Omega_0}}{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}} = 0. \quad (2.110)$$

Ainsi, en utilisant la relation (2.108) et le lemme 2.2 nous aboutissons à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0} \leq \epsilon} \frac{\|\chi(\theta, \delta\theta)\|_{0,\Omega_0}}{\|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}} = 0. \quad (2.111)$$

Si l'on se souvient des notations (2.101)-(2.104), on remarque que la relation (2.111) montre que T_1 est dérivable et que pour tout $\theta \in W^{1,4}(\Omega_0)$ on a

$T_1'(\theta) = A(\theta)$. Enfin la majoration (2.98) s'obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \|T_1'(\theta)(\delta\theta)\|_{1,\Omega_0} &= \|T_1(\theta, g(\theta, \delta\theta))\|_{1,\Omega_0} \leq K \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta}(T_1(\theta), \theta)(\delta\theta) \right\|_{1,\Omega_0} \\ &\leq K' \|T_1(\theta)\|_{1,\Omega_0} \|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0} \leq K'' \mathcal{J} \|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}. \end{aligned}$$

La première et la troisième inégalité étant une conséquence du lemme 2.2, la deuxième utilise le lemme 2.4. ■

Nous énonçons maintenant un résultat d'unicité :

Théorème 2.2 *Il existe $\varepsilon > 0$ telle que si $\mathcal{J} \leq \varepsilon$ alors la solution au problème de chauffage par induction (2.57)-(2.63) est unique.*

Preuve.

Nous avons montré que T_1 et T_2 sont continûment dérivables, ainsi l'opérateur T donné par (2.82) est continûment dérivable de $W^{1,4}(\Omega_0)$ dans $W^{1,4}(\Omega_0)$. De plus, en utilisant le lemme 2.2, ainsi que les relations (2.98),(2.96) et (2.97), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|T'(\theta)(\delta\theta)\|_{1,4,\Omega_0} &= \left\| \frac{\partial T_2}{\partial \varphi}(T_1(\theta), \theta) \circ T'_1(\theta)(\delta\theta) + \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(T_1(\theta), \theta)(\delta\theta) \right\|_{1,4,\Omega_0} \\ &\leq K (\|T_1(\theta)\|_{1,\Omega_0} \|T'_1(\theta)\|_{\mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), H^1(\Omega_0))} + \|T_1(\theta)\|_{1,\Omega_0}^2) \|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0} \\ &\leq K' \mathcal{J}^2 \|\delta\theta\|_{1,4,\Omega_0}, \end{aligned} \tag{2.112}$$

où K et K' sont des constantes positives.

La relation (2.112) nous montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\mathcal{J} \leq \varepsilon$ alors

$$\|T'(\theta)\|_{\mathcal{L}(W^{1,4}(\Omega_0), W^{1,4}(\Omega_0))} < 1.$$

Ceci signifie que sous la condition $\mathcal{J} \leq \varepsilon$, l'opérateur T est contractant, et donc qu'il admet un unique point fixe dans $W^{1,4}(\Omega_0)$. ■

Bibliographie

- [1] A. Bossavit, *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, Springer-Verlag, Paris, (1993).
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, édition Masson, (1993).
- [3] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, édition Herman, (1990).
- [4] S. Clain, *Analyse numérique et mathématique d'un modèle de chauffage par induction*, thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1994).
- [5] S. Clain, J. Rappaz, M. Swierkosz, *Modélisation et simulation numérique du chauffage par induction pour des géométries tridimensionnelles axisymétriques*, cours CEA-EDF-INRIA sur les méthodes numériques en électromagnétisme, INRIA-Rocquencourt, (1993).
- [6] M. Crouzeix, J. Descloux, *A bidimensional electromagnetic problem*, SIAM, j. math. anal. 21, num 3, pages 577-592, (1990).
- [7] A. Jacot, *Modélisation des transformations de phase à l'état solide et application au traitement thermique par induction*, thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1997).
- [8] J.C Nédelec, *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, centre de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique de Palaiseau, (1977).
- [9] C. Parietti, *Modélisation mathématique et analyse numérique d'un problème de chauffage électromagnétique*, thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1998).
- [10] J. Rappaz, R. Touzani, *On a two-dimensional magnetohydrodynamic problem, I: Modelling and analysis*, Modelisation mathématique et Analyse Numérique (MAN), **26**, pages 347-364, (1992).
- [11] V. Trenoguine, *Analyse fonctionnelle*, éditions Mir-Moscou, (1988).

Chapitre 3

Application de la méthode intégrale régulière pour la résolution numérique d'un problème lié à l'électromagnétisme.

3.0 Introduction

Comme nous l'avons fait remarquer dans l'introduction de la première partie, une résolution approchée efficace d'un problème d'EDP nécessite souvent l'emploi de plusieurs méthodes numériques. Nous allons ici en donner une illustration.

Dans cette partie, nous allons considérer un problème d'EDP très similaire au problème 2.3 qui décrit les aspects électromagnétiques du problème de chauffage par induction que nous avons étudiée dans la deuxième partie. Nous montrerons qu'une manière efficace de résoudre numériquement un tel problème, consiste à utiliser une méthode classique d'éléments finis couplée à la méthode intégrale que nous avons étudiée dans la première partie.

Cette troisième et dernière partie de la thèse constitue donc un développement naturel des deux premières. En effet, nous obtiendrons d'une part une validation supplémentaire pour notre méthode intégrale, et d'autre part, nous donnerons les bases concernant la résolution numérique du problème de chauffage par induction qui nous a intéressé précédemment.

Nous désignons par $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, connexe, dont la frontière Γ est régulière et par $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ son complémentaire dans le plan.

Soit $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ donnée. Nous considérons le problème suivant :

chercher $\varphi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$-\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (3.1)$$

$$-\Delta\varphi + \mathbf{i}\varphi = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

où nous avons noté $\mathbf{i}$ l'unité complexe vérifiant $\mathbf{i}^2 = -1$. Nous conserverons cette notation afin d'éviter de possibles confusions avec des indices entiers que nous noterons i .

Comme le problème (3.1) à (3.3) que nous considérerons dans la suite n'est rien d'autre qu'une légère simplification du problème 2.3, nous déduisons du lemme 2.1 qu'il admet une unique solution $\varphi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, en utilisant la section 1.2, le paragraphe 2.2.2,

et en posant $q = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma}^e$, on vérifie que l'on a

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} (1) & \int_{\Gamma} q(y)K(x, y)ds_y - \int_{\Gamma} \varphi(y)K_n(x, y)ds_y = 0 \quad \forall x \in \Omega, \\ (2) & \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \nabla \psi(x) dx + \mathbf{i} \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(x) dx \\ & \quad - \int_{\Gamma} q(x) \psi(x) ds_x = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx, \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Inversement, il existe un unique couple $(q, \varphi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^1(\Omega)$ solution de $(\mathcal{P})$. En outre, φ est la restriction sur Ω de la solution de (3.1) à (3.3), et la restriction sur Ω' de la solution à ce même problème s'obtient en posant

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma} q(y)K(x, y)ds_y - \int_{\Gamma} \varphi(y)K_n(x, y)ds_y, \quad x \in \Omega'.$$

Ainsi le problème (que nous appellerons abusivement $(\mathcal{P})$) consistant à chercher un couple $(q, \varphi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^1(\Omega)$ vérifiant $(\mathcal{P})$, est équivalent au problème (3.1) à (3.3). La formulation $(\mathcal{P})$ a cependant l'avantage d'être posée sur un domaine borné et nous allons donc dans la suite construire une méthode numérique basée sur cette formulation.

Remarquons aussi que dans la cas de notre problème de chauffage par induction, nous n'avons pas besoin de connaître explicitement le potentiel magnétique φ à l'extérieur des conducteurs. Ceci apporte un argument supplémentaire en faveur de la formulation $(\mathcal{P})$ qui ne fait apparaître que des grandeurs directement utiles.

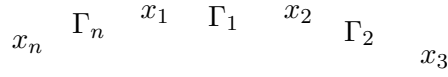
Nous désirons donc construire une méthode numérique permettant de résoudre le problème $(\mathcal{P})$ de manière approchée. En se penchant sur la formulation de ce problème, il apparaît qu'une méthode numérique combinant éléments finis et méthode intégrale soit la plus appropriée. C'est une telle méthode que nous allons présenter ici. Notre but dans ce chapitre n'est pas de justifier rigoureusement tout ce que nous allons faire. Nous nous contenterons de construire une méthode et, accessoirement, nous rappellerons les idées qui la justifie. Le lecteur souhaitant analyser rigoureusement la méthode pourra s'inspirer de l'article [3]. Citons encore que dans l'article [1] une méthode numérique originale est décrite et analysée. Elle permet elle aussi de ne pas avoir d'intégrale singulière à calculer, et pourrait très bien être utilisée pour le problème que nous considérons ici.

3.1 Une méthode pour la résolution approchée.

Soit $h > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0, nous voulons déterminer un couple $(q_h, \varphi_h) \in V_h \times W_h$ qui approche la solution $(q, \varphi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^1(\Omega)$ vérifiant $(\mathcal{P})$. Pour cela nous devons définir les espaces $V_h \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ et $W_h \subset H^1(\Omega)$, ainsi que les équations que doit vérifier (q_h, φ_h) , sachant que nous voulons que $\lim_{h \rightarrow 0} \|q - q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

Nous procédons de la manière suivante : soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω caractérisée par N_t triangles $T_1, \dots, T_{N_t}$ et N noeuds $x_1, \dots, x_N$ dont les n premiers d'entre eux se trouvent sur la frontière Γ . Nous notons par Γ_i , $i = 1, \dots, n$ les n segments constituant la frontière du domaine triangulé, et définis par

$\Gamma_i = [x_i, x_{i+1}]$ si $i < n$, $\Gamma_n = [x_n, x_1]$. Précisons que h est une caractéristique du maillage indiquant en quelque sorte la taille moyenne des triangles. Nous considérerons que le maillage en question est régulier, ce qui signifie que tous les triangles ont grosso-modo la même taille et donc que $h = O(\frac{1}{N_t})$ tend vers 0 lorsque l'on raffine le maillage. Nous notons par Ω_h le domaine défini par le maillage $\mathcal{T}_h$ et Γ_h sa frontière. Dans la figure 3.1 nous avons représenté un exemple d'un tel maillage dans le cas où Ω est délimité par une ellipse donnée.

FIG. 3.1 – *Triangulation d'une ellipse*

Si l'on suppose que Ω est convexe (comme sur la figure 3.1), on constate que $\Omega_h \subset \Omega$ est une approximation géométrique de Ω . De même Γ_h est une approximation géométrique de Γ . Ces approximations étant d'autant plus précises que h est petit.

Ainsi, pour le problème approché nous commencerons par faire une approximation de nature géométrique en posant : $\Omega_h \approx \Omega$ et $\Gamma_h \approx \Gamma$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les conséquences d'une telle approximation, à cet effet il pourra consulter l'article [2] et le livre [4].

Nous définissons ensuite les espaces discrets V_h et W_h en posant

$$\begin{aligned} V_h &= \{q : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{C}, q|_{\Gamma_i} \in \mathbb{P}_0[\mathbb{C}], \forall i = 1, \dots, n\}, \\ W_h &= \{\varphi \in H^1(\Omega_h), \varphi|_{T_j} \in \mathbb{P}_1[\mathbb{C}], \forall j = 1, \dots, N_t\}. \end{aligned}$$

On obtient immédiatement des bases de ces espaces vectoriels complexes, on a :

$$V_h = \text{Vect} \{1_{\Gamma_1}, \dots, 1_{\Gamma_n}\} ; W_h = \text{Vect} \{N_1, \dots, N_N\},$$

où pour $1 \leq i \leq N$, $N_i \in W_h$ est la fonction définie par

$$N_i|_{T_k} \equiv 0 \text{ si } x_i \notin T_k \text{ et } N_i(x_j) = \delta_{ij} \forall k = 1, \dots, N_t \text{ et } j = 1, \dots, N.$$

Ainsi, pour une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω donnée, nous chercherons une solution approchée (q_h, φ_h) du problème $(\mathcal{P})$ de la forme :

$$q_h(y) = \sum_{l=1}^n q_l 1_{\Gamma_l}(y), \quad (3.4)$$

$$\varphi_h(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j N_j(x). \quad (3.5)$$

En conséquence nous chercherons à déterminer les $n+N$ inconnues complexes $q_1, \dots, q_n, \varphi_1, \dots, \varphi_N$.

Il nous reste maintenant à définir un système discret issu de $(\mathcal{P})$ et constitué de $n+N$ équations algébriques faisant apparaître les $n+N$ inconnues.

De manière classique, l'équation $(\mathcal{P}).(2)$ sera remplacée par les N équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_h(x) \nabla N_i(x) dx + \mathbf{i} \int_{\Omega_h} \varphi_h(x) N_i(x) dx \\ - \int_{\Gamma_h} q_h(y) N_i(y) ds_y = \int_{\Omega_h} f(x) N_i(x) dx, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pour le traitement de l'équation $(\mathcal{P}).(1)$, nous nous inspirerons bien entendu du travail présenté dans la première partie. Ainsi, nous devons commencer par définir une famille de courbes auxiliaires $\tilde{\Gamma}_h$ (pour utiliser les mêmes paramètres que dans la première partie, nous devrions parler de la famille $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais cela revient au même). Nous rappelons que les courbes auxiliaires doivent être “parallèles” à Γ_h (ou à Γ) et elles doivent vérifier la relation asymptotique suivante : $\text{dist}(\Gamma_h, \tilde{\Gamma}_h) = O(h)$, lorsque h tend vers 0. Un choix naturel pour cette famille de courbes, consiste à associer un segment auxiliaire $\tilde{\Gamma}_i$ à chacun des segments Γ_i , $i = 1, \dots, n$ de Γ_h et de définir $\tilde{\Gamma}_h$ par $\tilde{\Gamma}_h = \cup_{i=1}^n \tilde{\Gamma}_i$ (cf figure 3.2).

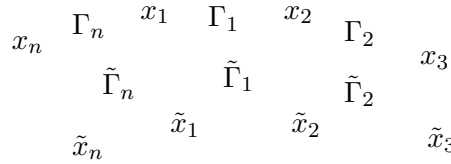


FIG. 3.2 – Triangulation d'une ellipse avec une courbe auxiliaire

Plus précisément, on commence par choisir un nombre $0 < \lambda \leq 1$ (dans la figure 3.2 ce nombre vaut environ 0.5). Soit $1 \leq i \leq n-1$, nous savons que le segment $\Gamma_i = [x_i, x_{i+1}]$ appartient au bord de la triangulation et donc qu'il existe un et un seul triangle du maillage qui le contient.

Soit $T_{l_i} = (x_i, x_{i+1}, x_{k_i})$ ce triangle, nous définissons le point $\tilde{x}_i$ sur le segment $[x_i, x_{k_i}]$ en posant $\tilde{x}_i = (1 - \lambda)x_i + \lambda x_{k_i}$.

Nous définissons ensuite les $n-1$ premiers segments auxiliaires par la relation $\tilde{\Gamma}_i = [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$, le dernier étant donné par $\tilde{\Gamma}_n = [\tilde{x}_n, \tilde{x}_1]$.

On vérifie sans peine que la courbe auxiliaire obtenue en posant $\tilde{\Gamma}_h = \cup_{i=1}^n \tilde{\Gamma}_i$ est incluse dans Ω , fermée, “presque parallèle” à Γ et vérifie $\text{dist}(\Gamma_h, \tilde{\Gamma}_h) = O(h)$, lorsque h tend vers 0. Remarquons qu'une telle construction, quoique très similaire à ce que nous avons présenté (et justifié) dans la première partie, en diffère par certains détails. En particulier, on peut constater que $\tilde{\Gamma}_h$ n'est qu'approximativement parallèle à Γ et n'est pas lisse, mais lisse par morceaux. Malgré ces détails, on se convaincra intuitivement que l'étude présentée dans la première partie pourrait être étendue de manière à englober le cas que l'on considère ici.

Ainsi, nous remplaçons l'équation $(\mathcal{P}).(1)$ par les n équations suivantes :

$$\int_{\tilde{\Gamma}_k} \int_{\Gamma} q_h(y) K(x, y) ds_y ds_x - \int_{\tilde{\Gamma}_k} \int_{\Gamma} \varphi_h(y) K_{n_y}(x, y) ds_y ds_x = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

En définitive, compte tenu des relations (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7), nous voyons que notre méthode consiste à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,N} & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & \dots & a_{N,N} & c_{N,1} & \dots & c_{N,n} \\ d_{1,1} & \dots & \dots & d_{1,N} & e_{1,1} & \dots & e_{1,n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{1,1} & \dots & \dots & d_{n,N} & c_{n,1} & \dots & e_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_N \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

où on a posé

$$a_{i,j} = \int_{\Omega_h} \nabla N_j(x) \nabla N_i(x) dx + \mathbf{i} \int_{\Omega_h} N_j(x) N_i(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.9)$$

$$c_{i,l} = - \int_{\Gamma_l} N_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

$$d_{k,j} = - \int_{\tilde{\Gamma}_k} \int_{\Gamma} N_j(y) K_{n_y}(x, y) ds_y ds_x, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

$$e_{k,l} = \int_{\tilde{\Gamma}_k} \int_{\Gamma_l} K(x, y) ds_y ds_x, \quad k, l = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

$$b_i = \int_{\Omega_h} f(x) N_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

Posons aussi $A = (a_{i,j}), C = (c_{i,l}), D = (d_{k,j})$ et $E = (e_{k,l})$. On vérifie que seule la matrice E est pleine.

En effet, il est bien connu que $a_{i,j} = 0$ s'il n'existe pas de triangle $T \in \mathcal{T}_h$ tel que $x_i, x_j \in T$. La matrice A est creuse, et seul un petit nombre de ces N^2 termes est non nul. Pour la matrice C , on vérifie que $c_{i,l} = 0$ si $x_i \notin \Gamma_l$. Ainsi, seuls $2n$ de ses termes sont non nuls. Il est aussi immédiat de vérifier que $d_{k,j} = 0$ si $x_j \notin \Gamma$. Ainsi seuls n^2 termes de D non nuls. Enfin, chacun des n^2 termes de la matrice E sont à priori non nul et devront être calculés.

Calcul numérique des coefficients.

Il est bien clair que seul le calcul des termes $d_{k,j}$ et $e_{k,l}$, donnés par les relations (3.11) et (3.12) demande quelques précautions.

A cet effet, nous utiliserons la règle d'intégration présentée et justifiée dans le paragraphe 1.3.4.

3.2 Exemple numérique.

Soit Ω le domaine délimité par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, et $c_1 = (-1, 0)$, $c_2 = (1, 0)$ deux points appartenant à ce domaine.

En prenant $r = 0.5$, nous vérifions que les boules B_k , $k = 1, 2$, de centre c_k et de rayon r sont incluses dans Ω . Nous définissons ensuite les fonctions $\xi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, par

$$\xi_k(x) = \begin{cases} \log \|x - c_k\| & \text{si } \|x - c_k\| > r, \\ \frac{1}{2r^2} \|x - c_k\|^2 + \log(r) - \frac{1}{2} & \text{si } \|x - c_k\| \leq r. \end{cases}$$

On vérifie que $\xi_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, et

$$\Delta \xi_k = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B_k, \\ \frac{2}{r^2} & \text{si } x \in B_k. \end{cases}$$

Ainsi la fonction

$$\varphi(x) = \xi_1(x) - \xi_2(x), \quad (3.14)$$

vérifie les équations (3.1) à (3.3), à condition de poser

$$f = -\Delta \varphi + \mathbf{i}\varphi. \quad (3.15)$$

Ceci nous permet de tester notre méthode : pour différents maillages de Ω , nous appliquerons notre méthode numérique avec la donnée f définie en (3.15), puis nous comparerons les résultats numériques obtenus avec la solution exacte donnée par la relation (3.14). Dans le tableau 3.1, pour différents maillages, nous avons reporté le nombre N de noeuds, le nombre n d'arêtes de bord, le nombre d'itérations (avec GMRES) nécessaires pour la résolution du système linéaire (3.8), l'erreur relative $E_h^{(1)}$ entre φ et φ_h mesurée dans la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ (et exprimée en pourcentage), et l'erreur relative $E_h^{(2)}$ entre q_h et q mesurée dans la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ (et exprimée en pourcentage).

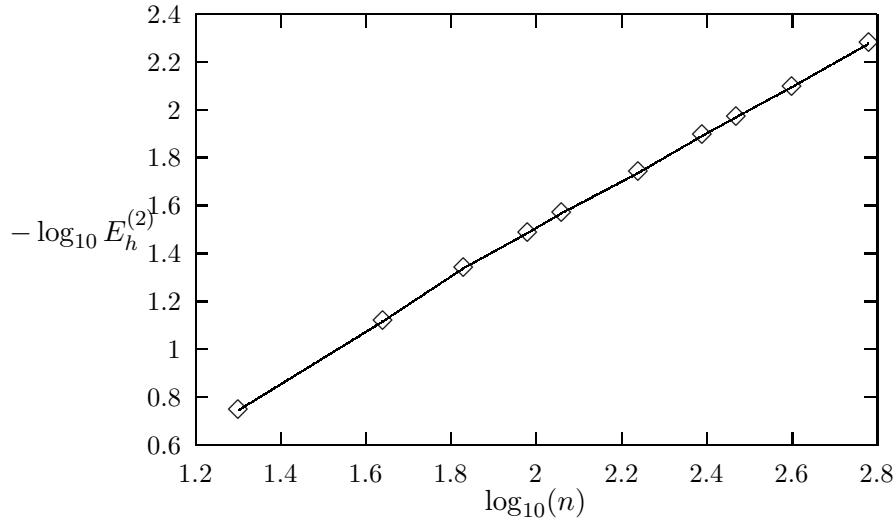
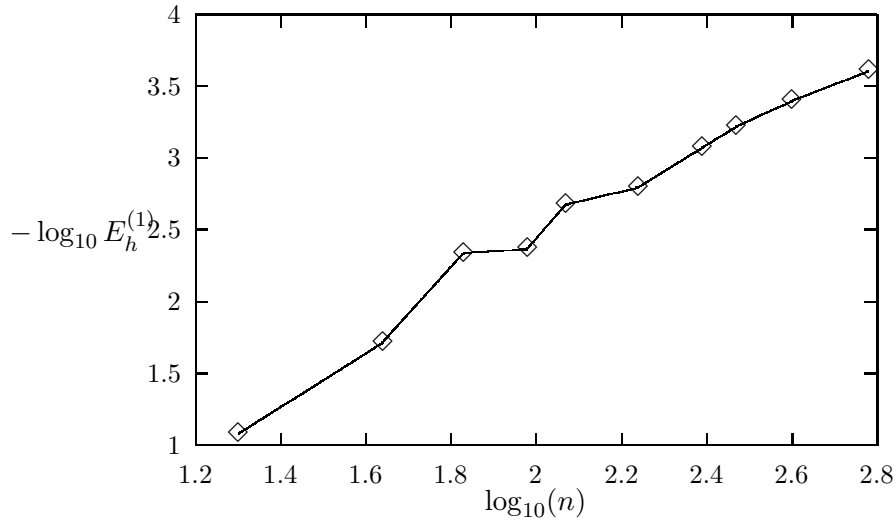
N	n	itérations	$E_h^{(1)}$	$E_h^{(2)}$
39	20	19	8.33	18.0
184	44	29	1.92	7.68
449	68	40	0.46	4.61
804	96	54	0.43	3.27
1265	116	67	0.21	2.72
2709	172	96	0.16	1.83
7886	296	152	0.06	1.07
12798	396	206	0.04	0.80
31086	596	315	0.025	0.53

TAB. 3.1 – *Test numérique.*

Précisons que les maillages ont été réalisés avec le logiciel SIMAIL : pour un nombre n de points répartis uniformément sur la frontière Γ (ces points définissent Γ_h), nous générons la triangulation de Ω_h avec un algorithme de Delaunay. Ainsi, les triangles générés sont quasi-équilatéraux et de même taille. Une conséquence de cette procédure est la relation $N \approx K.n^2$: le nombre de noeuds de la triangulations est à peu près proportionnel au carré du nombre d'arêtes de bord. On vérifie que pour les maillages que nous avons utilisé, on a $K \approx \frac{1}{10}$.

Les résultats présentés dans le tableau 3.1 illustrent bien l'efficacité de notre méthode.

Nous avons signalé que sur certains points (approximation géométrique de Γ par Γ_h , frontière Γ_h lisse par morceaux, courbes auxiliaires approximativement parallèles à Γ_h), la

FIG. 3.3 – Erreur L^2 sur la densité.FIG. 3.4 – Erreur L^2 sur le potentiel.

méthode intégrale employée ici différerait de celle que nous avons étudié dans la première partie. Cependant, on constate comme nous l'avions annoncé que ces différences ne remet-taient rien en cause. On remarquera en particulier que l'erreur $E_h^{(2)}$ commise sur la densité et mesurée en norme $L^2(\Gamma)$ décroît en $\mathcal{O}(1/n)$ (cf figure 3.3). Ceci tend à prouver que les estimations d'erreur que nous avons faites sont encore valables.

Dans la figure 3.4, nous avons repporté l'erreur $E_h^{(1)}$ commise sur la potentiel φ et mesurée en norme $L^2(\Omega)$. Sachant que les maillages utilisés sont uniformes, le paramètre h est proportionnel à $\frac{1}{n}$. Ainsi, on peut interpréter la figure 3.4 par l'affirmation $E_h^{(1)} \approx \mathcal{O}(h^{1.5})$. On se serait plutôt attendu au résultat $E_h^{(1)} \approx \mathcal{O}(h^2)$ (cf [3] page 1076). Précisons néanmoins que nous avons aussi implémenté et testé la méthode analysée dans ([3]). Les résultats numériques obtenus étant sensiblement les mêmes que pour notre méthode.

On vérifie aussi (cf figure 3.5) que le nombre d'itérations (N_{it}) s'accroît a peu près linéairement avec du nombre n d'arêtes de bord (ce qui signifie aussi que $N_{it} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}})$).

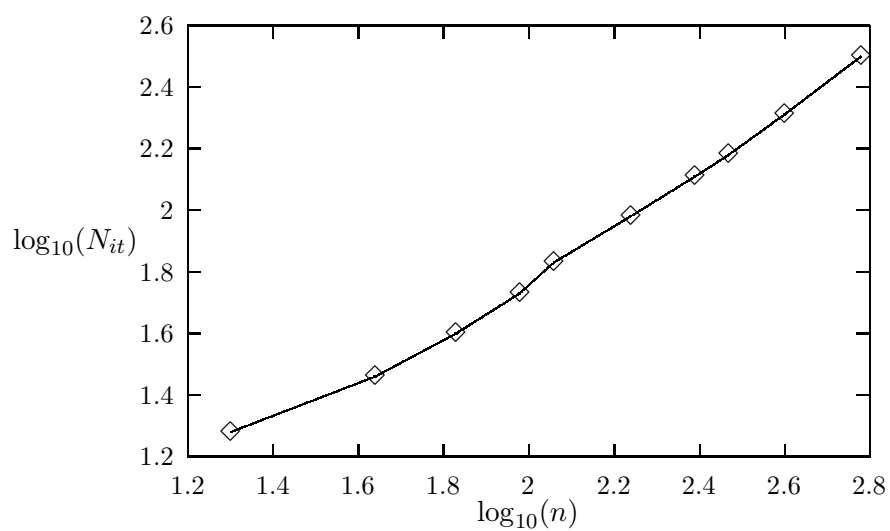


FIG. 3.5 – Croissance du nombre d'itérations.

Bibliographie

- [1] M. Lenoir, M. Vullierme-Ledard, C. Hazard, *Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems*, SIAM J. math. anal., vol 23, num 3, pages 579-608, (1992).
- [2] M.N Le Roux, *Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2*, RAIRO, analyse numérique vol 11, n°1, pages 27-66, (1977).
- [3] C. Johnson, J.C. Nédélec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, math. of comp., vol 35, num 152, pages 1063-1079, (1980).
- [4] P.A Raviart, J.M Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, édition Masson, (1993).

Curriculum Vitae

Je suis né le 04 décembre 1970. Après l'obtention en 1988 d'un Baccalauréat de type D au lycée Camille-Sée de Colmar, j'ai poursuivi mes études à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, puis à l'Université de Haute Alsace à Mulhouse. J'y ai obtenu un DEA de mathématiques en 1994. L'année suivante, j'ai obtenu un DESS d'ingénierie mathématique à la Faculté des Sciences et Techniques de Besançon.

En avril 1996, j'ai été engagé comme assistant à l'Ecole Polytechnique de Lausanne, dans la chaire du Professeur J. Rappaz.