

Date :
Université de Nice
Département de Mathématiques

NOM :

Prénom :

Groupe :
Année 2012-2013
Licence MASS 2e année

Fiche TD 12

Les punaises préfèrent-elles tomber sur le dos ?
Intervalle de confiance d'une estimation

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.* Lorsqu'on vide une boîte de punaises sur la table, on a l'impression qu'une punaise manifeste une "préférence" p à tomber sur le dos plutôt que sur la pointe.

1. Proposer un modèle probabiliste pour décrire cette situation.
2. On vide une boîte de n punaises sur la table et on compte le nombre D_n de punaises tombées sur le dos. Donner un modèle probabiliste pour D_n .
3. Donner un estimateur P_n (ou $\hat{P}_n$) de p .
4. Ecrire P_n sous la forme $P_n = aZ_n + b$, où Z_n est proche en loi d'une v.a. $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$; que valent alors a et b (en fonction de p et n) ?
5. On a vidé une boîte de 54 punaises et on a trouvé $d_{54} = 30$ punaises sur le dos ; quelle est l'estimation $\hat{p}$ de p issue de cette expérience ?

6. On cherche un “intervalle de confiance au seuil $\alpha = 5\%$ ” du type $[P_n - \Delta, P_n + \Delta]$, c’est-à-dire tel que $\mathbb{P}(\{p \notin [P_n - \Delta, P_n + \Delta]\}) \leq \alpha = 5\%$. Montrer tout d’abord que

$$\{p \in [P_n - \Delta, P_n + \Delta]\} = \{P_n \in [p - \Delta, p + \Delta]\}.$$

7. Trouver z_- et z_+ tels que $\{P_n \in [p - \Delta, p + \Delta]\} = \{Z_n \in [z_-, z_+]\}$.

8. En déduire finalement une approximation (majoration) Δ de $\Delta_\alpha = \Delta_{5\%}$.

9. Peut-on affirmer qu’au vu de l’expérience et de ce calcul, *au seuil $\alpha = 5\%$, les punaises préfèrent tomber sur le dos ?*

10. Même question si on avait $n = 540$ et $d_{540} = 299$.



Edwin Moore, inventeur, en 1900, de la punaise :

Exercice 1 (Contrôle des fraudes) Un boulanger découpe sa pâte à l'aide d'une machine produisant des boules de masse μ réglable, et d'écart-type $\sigma = 20g$.

1. Un contrôle prélève un échantillon de 100 pains. Le poids total se révèle être de 38kg. On modélise le poids du i ème pain par une v.a. X_i , où les v.a. (X_i) sont i.i.d. d'espérance μ et d'écart-type σ . Au vu de l'échantillon, donner une estimation μ^* de μ et un intervalle de confiance $[\mu^* - \delta, \mu^* + \delta]$ au seuil

$\alpha = 5\%$ puis $\alpha = 1\%$ pour la valeur exacte de μ .

$[\mu^* - \delta, \mu^* + \delta] =$

2. On suppose que $\mu = 400g$; quelle est la probabilité π qu'un échantillon de 100 pains ait un poids total de moins de 38kg?

$\pi =$

Exercice 2 (Qualité garantie) Pour déterminer la qualité d'une production, on prélève un échantillon de 1000 articles, et il se révèle comporter 80 articles défectueux. Donner un modèle probabiliste simple de cette situation. En déduire un intervalle $[a, b] = [0.08 - \delta, 0.08 + \delta]$ de confiance au seuil $\alpha = 5\%$ contenant la proportion exacte d'articles defectueux.