

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. **Encadrez finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Gros bras) Suite à l'annulation d'un concert de Hard-Rock, un guichet doit procéder au remboursement des places. Le prix moyen des places est de 50 euros, avec un écart-type de 30 euros. Le guichet dispose de 6500 euros pour rembourser les 120 personnes qui se pressent devant le guichet. Le guichetier se demande quelle est la probabilité qu'il ait assez d'argent ?

1. Modélisation : on note $X_i, i = 1..120$ le prix du billet de la i -ème personne venue ce jour là demander le remboursement de son billet. Proposez un modèle probabiliste simple pour les X_i , en explicitant toutes les propriétés que vous souhaitez utiliser ensuite.

Faute de plus d'informations, on modélise les X_i par v.a. ^{des} indépendantes de même loi. Comme la moyenne est un estimateur de l'espérance on suppose que $E(X_i) = 50$ (euros). On nous suggère que l'écart-type σ est de 30 (euros)

2. Soit $S_{120} := X_1 + \dots + X_{120}$ la somme à rembourser ce jour là. Former à partir de S_{120} et de la manière vue en cours une v.a. Z_{120} centrée réduite.

*La centrée-réduite Z_{120} de S_{120} est $Z_{120} = \frac{S_{120} - E(S_{120})}{\sqrt{\text{Var}(S_{120})}}$.
 et donc $Z_{120} = \frac{S_{120} - 120 \times 50}{\sqrt{120} \times 30}$*

$$Z_{120} = \frac{S_{120} - 6000}{60\sqrt{30}}$$

3. Trouver a tel que $\{S_{120} \leq 6500\} = \{Z_{120} \leq a\}$.

$$\begin{aligned} \{S_{120} \leq 6500\} &= \{S_{120} - 6000 \leq 6500 - 6000\} \\ &= \left\{ \frac{S_{120} - 6000}{60\sqrt{30}} \leq \frac{500}{60\sqrt{30}} \right\} = \{Z_{120} \leq 1,52.. \} \end{aligned}$$

$$a = 1,52..$$

4. Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, que vaut $\mathbb{P}(\{Z \leq a\})$?

On consulte la table à $u_1 = 1,5$ et $u_2 = 0,02$

$$\mathbb{P}(\{Z \leq a\}) = 0,9357..$$

5. Formulez et expliquez votre conclusion quant au problème du guichetier ?



*Nous venons de montrer que $\mathbb{P}(\{S_{120} \leq 6.500\}) \approx 93,57\%$.
 Comme S_{120} représente, dans notre modèle, la somme d'argent nécessaire pour rembourser les 120 personnes présentes, notre modèle nous conduit à estimer à 93,57% la probabilité que les 6.500 € disponibles suffisent à rembourser tous les présents.*

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Exercice 2 (Course à l'échalotte) Dans une université (parisienne), les étudiants doivent choisir entre deux options. Il y a 144 étudiants, et les options ne peuvent accueillir qu'au plus 84 étudiants. Quelle est la probabilité que chaque étudiant obtienne l'option de son choix? On indique que les deux options attirent généralement la même proportion d'étudiants.

Vous donnerez une modélisation et une approximation ramenant la question à donner $P(\{a \leq Z \leq b\})$ où Z suit une loi normale centrée réduite, et où a et b sont deux nombres à préciser.

On note A et B les deux options offertes, A_i l'événement "le i -ème étudiant souhaite s'inscrire à l'option A " et $X_i = 1_{A_i}$ et ainsi S_{144} représente le nombre total d'étudiants souhaitant s'inscrire à l'option A . On suppose que les A_i sont indépendants et de même probabilité p , et donc les X_i sont i.i.d. (indépendants, identiques distribués) de loi $BE(1, p)$. Pour que tous les étudiants souhaitant choisir A puissent le faire, il faut et il suffit que $S_{144} \leq 84$, mais pour que les étudiants souhaitant prendre l'option B puissent le faire il faut et il suffit que $144 - S_{144} \leq 84$, ce qui équivaut à $S_{144} \geq 60$.

Var $X_i = p(1-p)$

*) suggère

$p = 0.5$

$LN(6) \Rightarrow$ moyenne produite de l'EE

Finalement, on veut $\{60 \leq S_{144} \leq 84\} = \left\{ \frac{60-72}{\sqrt{144 \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{S_{144} - 144 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{144 \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{84-144 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{144 \cdot \frac{1}{4}}} \right\}$

Le problème revient à $\mathbb{P}\{-2 \leq Z_{120} \leq +2\} \approx \mathbb{P}\{-2 \leq Z \leq +2\}$, avec $Z \sim N(0,1)$

$\mathbb{P}\{-2 \leq Z \leq +2\} = \mathbb{P}\{Z \leq +2\} - \mathbb{P}\{Z \leq -2\} = \mathbb{P}(Z \leq +2) \stackrel{TLR}{=} \mathbb{P}(-Z \geq +2) = \mathbb{P}(Z \leq -2) = (1 - \mathbb{P}(-Z \leq -2))$
 mais $\mathcal{U}(0,1)$ est paire, donc $\mathbb{P}(-Z \leq 2) = \mathbb{P}(Z \leq 2) = 0.9772..$

Votre conclusion : $2 \times 0.9772.. - 1 = 0.9544 = x$

u1\u2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000000	0,5039894	0,5079784	0,5119665	0,5159535	0,5199389	0,5239223	0,5279032	0,5318814	0,5358565
0,1	0,5398279	0,5437954	0,5477585	0,5517168	0,5556700	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5792597	0,5831861	0,5870644	0,5908941	0,5946748	0,5984063	0,6020881	0,6057206	0,6093032	0,6128359
0,3	0,6163184	0,6198476	0,6233221	0,6267418	0,6301063	0,6334154	0,6366688	0,6398663	0,6430077	0,6460929
0,4	0,6491319	0,6521992	0,6552095	0,6581626	0,6610582	0,6638961	0,6666761	0,6693980	0,6720617	0,6746671
0,5	0,6772156	0,6797581	0,6822381	0,6846544	0,6870068	0,6892951	0,6915191	0,6936786	0,6957734	0,6978034
0,6	0,6997684	0,7017581	0,7036826	0,7055418	0,7073354	0,7090641	0,7107277	0,7123261	0,7138592	0,7153268
0,7	0,7167289	0,7181714	0,7195469	0,7208454	0,7220677	0,7232137	0,7242842	0,7252791	0,7261884	0,7270121
0,8	0,7277500	0,7285779	0,7293216	0,7300810	0,7307560	0,7313465	0,7318524	0,7322736	0,7327000	0,7330416
0,9	0,7333882	0,7337409	0,7340988	0,7344618	0,7347298	0,7349927	0,7352504	0,7355028	0,7357500	0,7359919
1,0	0,7362276	0,7364739	0,7367150	0,7369508	0,7371813	0,7374064	0,7376261	0,7378404	0,7380492	0,7382524
1,1	0,7384500	0,7386453	0,7388359	0,7390217	0,7392026	0,7393785	0,7395493	0,7397150	0,7398756	0,7399999
1,2	0,7401588	0,7403131	0,7404628	0,7406078	0,7407481	0,7408836	0,7410143	0,7411401	0,7412610	0,7413769
1,3	0,7414878	0,7415947	0,7416975	0,7417961	0,7418904	0,7419804	0,7420661	0,7421474	0,7422242	0,7422964
1,4	0,7423640	0,7424311	0,7424934	0,7425508	0,7426032	0,7426506	0,7426929	0,7427301	0,7427622	0,7427892
1,5	0,7428111	0,7428371	0,7428581	0,7428741	0,7428851	0,7428911	0,7428931	0,7428911	0,7428851	0,7428741
1,6	0,7428581	0,7428421	0,7428161	0,7427801	0,7427341	0,7426781	0,7426121	0,7425361	0,7424501	0,7423541
1,7	0,7422481	0,7421421	0,7420261	0,7419001	0,7417641	0,7416181	0,7414621	0,7412961	0,7411201	0,7409341
1,8	0,7407381	0,7405321	0,7403161	0,7400901	0,7398541	0,7396081	0,7393521	0,7390861	0,7388101	0,7385241
1,9	0,7382281	0,7379321	0,7376261	0,7373101	0,7369841	0,7366481	0,7363021	0,7359461	0,7355801	0,7352041
2,0	0,7348181	0,7344421	0,7340561	0,7336601	0,7332541	0,7328381	0,7324121	0,7319761	0,7315301	0,7310741
2,1	0,7306081	0,7301521	0,7296861	0,7292101	0,7287241	0,7282281	0,7277221	0,7272061	0,7266801	0,7261441
2,2	0,7255981	0,7250521	0,7244961	0,7239301	0,7233541	0,7227681	0,7221721	0,7215661	0,7209501	0,7203241
2,3	0,7196881	0,7190521	0,7184061	0,7177501	0,7170841	0,7164081	0,7157221	0,7150261	0,7143201	0,7136041
2,4	0,7128781	0,7121521	0,7114161	0,7106701	0,7099141	0,7091481	0,7083721	0,7075861	0,7067901	0,7059841
2,5	0,7051681	0,7043521	0,7035261	0,7026901	0,7018441	0,7009881	0,7001221	0,6992461	0,6983601	0,6974641
2,6	0,6965581	0,6956521	0,6947361	0,6938101	0,6928741	0,6919281	0,6909721	0,6900061	0,6890301	0,6880441
2,7	0,6870481	0,6860621	0,6850661	0,6840601	0,6830441	0,6820181	0,6809821	0,6799361	0,6788801	0,6778141
2,8	0,6767381	0,6756721	0,6745961	0,6735101	0,6724141	0,6713081	0,6701921	0,6690661	0,6679301	0,6667841
2,9	0,6656281	0,6644721	0,6633061	0,6621301	0,6609441	0,6597481	0,6585421	0,6573261	0,6561001	0,6548641
3,0	0,6536181	0,6523821	0,6511361	0,6498801	0,6486141	0,6473381	0,6460521	0,6447561	0,6434501	0,6421341
3,1	0,6408081	0,6394921	0,6381661	0,6368301	0,6354841	0,6341281	0,6327621	0,6313861	0,6300001	0,6286041