

Fiche TD 8

Fonctions génératrices et convergence en loi :
 la loi de Poisson comme loi des assureurs

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.*

On rappelle qu'on dit que Z suit une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si pour tout entier $k \geq 0$, on a $\mathbb{P}(\{Z = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Il est d'usage de modéliser le nombre d'assurés d'un assureur qui subissent un sinistre (durant une période fixée) par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. L'idée est que le nombre n d'assurés d'un assureur est grand et que la probabilité qu'un assuré donné ait une sinistre est faible. Voici un modèle simple conduisant à ce résultat : Soit n fixé, et $(X_i)_{i=1..n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes $X_i \sim \mathcal{B}(1, p_n)$, avec $p_n = \frac{\lambda}{n}$; $X_i = 1$ modélise que le i -ème assuré subit un sinistre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n.$$

On suppose que les X_i sont indépendants; le fait que p_n est petit avec n modélise que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, λ représentant le "nombre d'assurés sinistrés espéré".

1. Soit $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer la fonction génératrice des moments (fgm) M_Z de Z .

$$M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tz}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$M_Z(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

2. Calculer la fgm M_{X_i} de X_i .

x_i	1	0
p_i	$\frac{\lambda}{n}$	$1 - \frac{\lambda}{n}$

$$M_{X_i}(t) = \mathbb{E}(e^{tx_i}) = e^t \frac{\lambda}{n} + e^0 \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\lambda}{n} (e^t - 1) + 1$$

$$M_{X_i}(t) = 1 + \frac{\lambda}{n} (e^t - 1)$$

3. Calculer la fgm $M_{Y_n}(t)$ de Y_n .

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= E(e^{tY_n}) = E(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}) \\
 &= E(e^{tX_1 + \dots + tX_n}) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) \\
 \text{car } \prod_i X_i &\rightarrow E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) \\
 &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right) \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n
 \end{aligned}$$

$$M_{Y_n}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}$. On rappelle que $\ln(1+u) = u(1+\varepsilon(u))$, où $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. Conclusion ?

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + u\right)\right) \\
 &= \exp\left(n u (1 + \varepsilon(u))\right) = \exp\left(n \frac{\lambda}{n}(e^t - 1) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)\right)\right) \quad \text{avec } u = \frac{\lambda}{n}(e^t - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
 &= e^{\lambda(e^t - 1) \underbrace{\left(1 + \varepsilon\left(\frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{0} 1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(e^t - 1)} = M_Z(t) \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{P}(\lambda)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Comme $\lim_n M_{Y_n}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} = M_Z(t)$ pour $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

on en déduit que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

"La somme d'un grand nombre de risques indépendant de faible probabilité suit approximativement une loi de Poisson."

Conclusion : Y_n converge en loi vers une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.