

Date :
Université de Nice
Département de Mathématiques

NOM :

Prénom :

Groupe :
Année 2012-2013
Licence MASS 2e année

Fiche TD 14

Fonctions génératrices et convergence en loi :
la loi de Poisson comme loi des assureurs

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.*

On rappelle qu'on dit que X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si pour tout entier $k \geq 0$, on a $\mathbb{P}(\{Z = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Il est d'usage de modéliser le nombre d'assurés d'un assureur qui subissent un sinistre (durant une période fixée) par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. L'idée est que le nombre n d'assurés d'un assureur est grand et que la probabilité qu'un assuré donné ait un sinistre est faible. Voici un modèle simple conduisant à ce résultat : Soit n fixé, et $(X_i)_{i=1..n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p_n)$, avec $p_n = \frac{\lambda}{n}$; $X_i = 1$ modélise que le i -ème assuré subit un sinistre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n.$$

On suppose que les X_i sont indépendants; le fait que p_n est petit avec n modélise que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, λ représentant le "nombre d'assurés sinistrés espéré".

1. Soit $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer la fonction génératrice des moments (fgm) M_Z de Z .

$M_Z(t) =$

2. Calculer la fgm M_{X_i} de X_i .

$M_{X_i}(t) =$

3. Calculer la fgm $M_{Y_n}(t)$ de Y_n .

$$M_{Y_n}(t) =$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}$. On rappelle que $\ln(1+u) = u(1+\varepsilon(u))$, où $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. Conclusion ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n} =$$

Conclusion :