

Fiche TD 7

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. Encadrez finalement votre réponse.

Exercice 1 Soit (A_i) une suite d'épreuves indépendantes de probabilité $p \in [0, 1]$. Soit $X_i = \mathbb{I}_{A_i}$ le résultat de la i -ème épreuve. On souhaite déterminer un nombre $\bar{n}$ d'expériences qu'il suffit d'effectuer pour que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{\bar{n}} \sum_{i=1}^{\bar{n}} X_i - p \right| \geq 10^{-2} \right) \leq 10^{-1}. \quad (1)$$

1. Posons $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $\mu_n := \mathbb{E}(Y_n)$ et $\text{Var}(Y_n)$

$$\begin{aligned} \mu_n = \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \quad , \text{ car } X_i = \mathbb{I}_{A_i} \sim \mathcal{B}(1, p) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = \frac{np}{n} = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_n) &= \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \quad \text{car } \perp\!\!\!\perp X_i \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) \quad \text{car } X_i \sim \mathcal{B}(1, p). \\ &= \frac{n p(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

Rappelons qu'en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour Y_n et $\lambda = 10^{-2}$ nous avons trouvé que, pour $p = 0.5$, tout $\bar{n} \geq 25000$ convient. Nous voulons à présent utiliser une méthode plus fine pour trouver une valeur plus petite de

2. Posons $Z_n := \frac{1}{\sigma_n} (Y_n - \mu_n)$, où $\sigma_n := \sqrt{\text{Var}(Y_n)}$. Montrer que $\{|Y_n - \mu_n| \geq 10^{-2}\} = \left\{ |Z_n| \geq \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \right\}$;
 indication : exprimer $Y_n - \mu_n$ en fonction de Z_n .

$$\begin{aligned} \{|Y_n - \mu_n| \geq 10^{-2}\} &= \{| \sigma_n Z_n | \geq 0.01\} \\ &= \left\{ |Z_n| \geq \frac{0.01}{\sigma_n} \right\} = \left\{ |Z_n| \geq \frac{0.01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right\} \\ &= \left\{ |Z_n| \geq \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \right\}. \end{aligned}$$

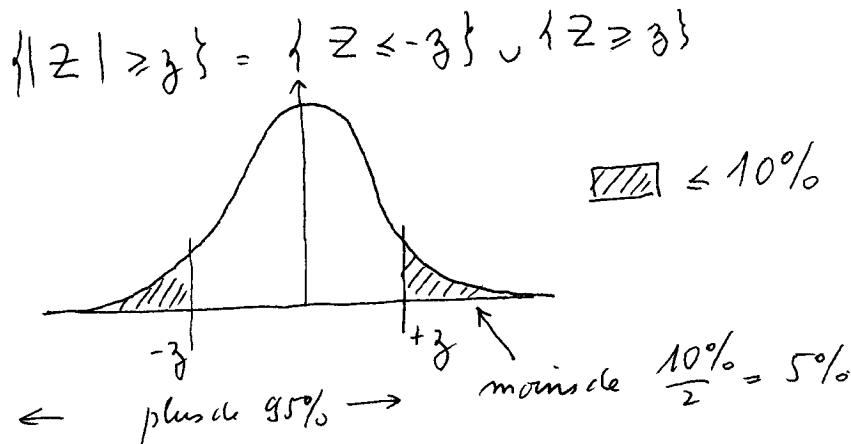
3. Pour $n \geq 60$ on peut assimiler la loi de Z_n à la loi d'une v.a. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et donc

$$\mathbb{P}(\{|Y_n - \mu_n| \geq 10^{-2}\}) = \mathbb{P}\left(\left\{|Z_n| \geq \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right\}\right) \simeq \mathbb{P}(\{|Z| \geq z\}),$$

où on a posé $z := \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$. En utilisant la symétrie de la loi normale, vérifier qu'ainsi la contrainte

(1) sur n (donc sur z) devient

$$\mathbb{P}(\{Z \leq z\}) \geq 0.95 \quad (2)$$



On veut $0.1 \geq \mathbb{P}(\{|Z| \geq z\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq -z\} \cup \{Z \geq z\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq -z\}) + \mathbb{P}(\{Z \geq z\}) = 2\mathbb{P}(\{Z \geq z\})$ car la loi normale est paire.

Donc $\mathbb{P}(\{Z \geq z\}) \leq \frac{10\%}{2} = 5\%$ et donc $\mathbb{P}(\{Z \leq z\}) = \mathbb{P}(\{Z < z\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Z \geq z\}) \geq 1 - 5\% = 95\%$

4. Au moyen de la table de la loi normale fournie, déterminer z_0 tel que $\mathbb{P}(Z \leq z_0) = 0.95$; la contrainte (2) revient donc à s'assurer que $z \geq z_0$, toujours avec $z = \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$.

Sur la table on lit $\mathbb{P}(\{Z \leq u_1 + u_2\}) = 0.9505285$ pour $u_1 = 1.6$ et $u_2 = 0.05$.
on obtient donc $z_0 = u_1 + u_2 = 1.6 + 0.05 = 1.65$.

Il convient donc de choisir n tel que $\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = z \geq z_0 = 1.65$

5. Trouver, pour $p = 0.5$ une valeur plus petite d'un $\bar{n}$ pour lequel (1) est satisfaite.

Il convient de choisir $\bar{n}$ parmi les n tels que $p=0.5$

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 1.65 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.65}{0.01} \sqrt{p(1-p)} = 165 \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 82.5$$

$$\Leftrightarrow n \geq (82.5)^2 = 6806.25$$

$$\bar{n} = 6807 \text{ convient}$$

$u_1 \backslash u_2$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000000	0.5039894	0.5079683	0.5119368	0.5158953	0.5198439
0.1	0.5398279	0.5437954	0.5477529	0.5516999	0.5556368	0.5595639
0.2	0.5792597	0.5831661	0.5870644	0.5909541	0.5948348	0.5987063
0.3	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368306
0.4	0.6554217	0.6591970	0.6629572	0.6666999	0.6704317	0.6741506
0.5	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019441	0.7054015	0.7088403
0.6	0.7257469	0.7290692	0.7323712	0.7356528	0.7389138	0.7421540
0.7	0.7580364	0.7611480	0.7642376	0.7673050	0.7703501	0.7733727
0.8	0.7881447	0.7910300	0.7938920	0.7967307	0.7995459	0.8023375
0.9	0.8159399	0.8185888	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439
1.0	0.8413447	0.8437523	0.8461358	0.8484950	0.8508300	0.8531409
1.1	0.8643339	0.8665004	0.8686431	0.8707618	0.8728568	0.8749280
1.2	0.8849303	0.8868605	0.8887675	0.8906514	0.8925122	0.8943502
1.3	0.9031895	0.9049020	0.9065824	0.9082408	0.9098773	0.9114919
1.4	0.9192433	0.9207301	0.9221961	0.9236414	0.9250663	0.9264707
1.5	0.9331928	0.9344783	0.9357445	0.9369916	0.9382198	0.9394292
1.6	0.9452007	0.9463011	0.9473839	0.9484493	0.9494974	0.9505285