

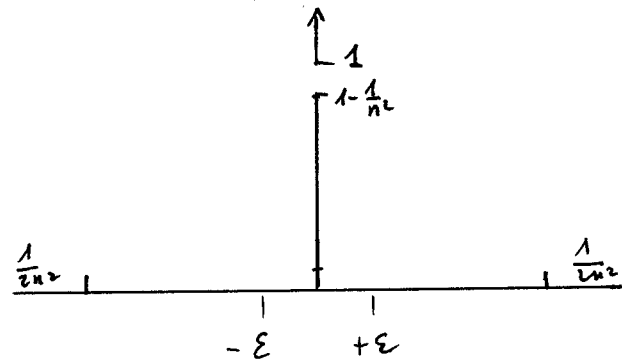
Fiche TD 6

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. Encadrez finalement votre réponse.

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.

1. Supposons que $P(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$ et $P(X_n = -n) = P(X_n = n) = 1/2n^2$. Donner le tableau de la loi de X_n et en esquisser une représentation géométrique.

x_i	$-n$	0	$+n$
$\mathbb{P}(X_n = x_i) = p_i$	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$



2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$. En déduire $\text{Var}(X_n)$.

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = -n \frac{1}{2n^2} + 0 + n \frac{1}{2n^2} = 0$$

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = +n^2 \frac{1}{2n^2} + 0 + n^2 \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E} X_n)^2 = 1 - 0 = 1$$

Huygens

3. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge (néanmoins) en probabilité vers 0.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\{|X_n - 0| > \varepsilon\}) &= \mathbb{P}(\{X_n = -n\}) + \mathbb{P}(\{X_n = +n\}) \quad \text{dès que } n > \varepsilon \\ &= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{|X_n - 0| > \varepsilon\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$\text{Donc } X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

Exercice 2 Soit (A_i) une suite d'épreuves indépendantes de probabilité $p = 0,5$. Soit $X_i = \mathbb{I}_{A_i}$ le résultat de la i -ème épreuve. On souhaite déterminer un nombre $\bar{n}$ d'expériences qu'il suffit d'effectuer pour que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{\bar{n}} \sum_{i=1}^{\bar{n}} X_i - \frac{5}{10} \right| \geq 10^{-2} \right) \leq 10^{-1}. \quad (1)$$

1. Posons $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\text{Var}(Y_n)$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i \underset{\mathbb{I} X_i}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = \frac{np}{n} = p$$

$$\text{Var}(Y_n) = \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} np(1-p) \underset{p=\frac{1}{2}}{\downarrow} = \frac{1}{4n}$$

2. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour Y_n et $\lambda = 10^{-2}$.

$$\mathbb{P} \left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \lambda \right) \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\lambda^2} \Leftrightarrow \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{5}{10} \right| \geq 10^{-2} \right) \leq \frac{1}{4n \cdot 10^{-4}}$$

3. En déduire un $\bar{n}$ pour lequel l'inégalité (1) est satisfaite.

Pour assurer que (1) soit satisfaite il suffit ^{donc} que $\bar{n}$ soit tel que

$$\left(\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{\bar{n}} \sum_{i=1}^{\bar{n}} X_i - \frac{5}{10} \right| \geq 10^{-2} \right) \leq \frac{1}{4\bar{n} \cdot 10^{-4}} \leq 10^{-1} \right)$$

ceci équivaut à $\frac{1}{4} 10^{4+1} \leq \bar{n}$

il suffit donc de choisir $\bar{n} = 25.000$

En d'autres termes, après 25.000 tirages indépendants de pile-ou-face d'une pièce "juste" on est assuré qu'il y a une probabilité supérieure à 90% que la moyenne des nombre de "pile" soit dans $[0,49, 0,51]$

(Au TD suivant, on verra qu'on a déjà ce résultat au bout de 6807 tirages. En effet, la majoration Bienaymé-Tchebichev est assez grossière)