

**Date :**  
Université de Nice  
Département de Mathématiques

**NOM :**

**Prénom :**

**Groupe :**  
Année 2012-2013  
Licence MASS 2e année

Fiche TD 05  
Décorrélation et indépendance,  
et diversification

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.*

**Exercice 1 (Décorrélation et indépendance) .**

1. Montrer que si les v.a.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .
2. Soit  $X$  une v.a. prenant ses valeurs dans  $\{-1, 0, +1\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\{+1\})$ . Vérifier que  $X^3 = X$ . Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
3. On pose  $Y = X^2$  qui est donc  $X$ -mesurable; vérifier que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (Indication : considérer les événements  $A = \{X \leq -1\}$  et  $B = \{Y \leq 0\}$  qui seraient indépendants si  $X$  et  $Y$  étaient indépendantes.)
4. Vérifier que néanmoins  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Exercice 2 (Mettre ses oeufs dans deux paniers)** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux évènements indépendants de même probabilité  $0 < p < 1$ . On considère les deux v.a.  $X_1 = 2k(1 - \mathbb{I}_{A_1})$  et  $X_2 = k(1 - \mathbb{I}_{A_1}) + k(1 - \mathbb{I}_{A_2})$ . Voici un exemple de calcul de  $\mathbb{E}(X_1)$  et de  $\text{Var}(X_1)$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \mathbb{E}(2k(1 - \mathbb{I}_{A_1})) = 2k\mathbb{E}(1 - \mathbb{I}_{A_1}) = 2k(\mathbb{E}(1) - \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_1})) && \text{(linéarité de } \mathbb{E} \text{)} \\ &= 2k(1 - \mathbb{P}(A_1)) = 2k(1 - p) && (\mathbb{I}_{A_1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_1) &= \text{Var}(2k(1 - \mathbb{I}_{A_1})) = 4k^2\text{Var}(1 - \mathbb{I}_{A_1}) && \text{(2-homogénéité de Var)} \\ &= 4k^2(\text{Var}(1) + \text{Var}(-\mathbb{I}_{A_1})) && \text{(car } 1 \perp\!\!\!\perp A_1 \text{)} \\ &= 4k^2(0 + (-1)^2\text{Var}(\mathbb{I}_{A_1})) = 4k^2p(1 - p) && \text{(car } \mathbb{I}_{A_1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p))\end{aligned}$$

1. Calculer en justifiant de même l'espérance et la variance de la v.a  $X_2$ .

2. Montrer que  $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$  et  $\text{Var}(X_2) < \text{Var}(X_1)$

3. Donner les lois de  $X_1$  et  $X_2$  pour  $p = 0.1$