

Fiche TD3  
 Probabilité, loi d'une v.a., et espérance

**Exercice 1 (Modèle CRR : probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ )** Rappelons qu'on avait  $S_k = S_{k-1}U_k$ , avec  $U_k = (\frac{u}{d})^{\delta J_k} d$ . On dit que  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  si<sup>1</sup>  $\mathbb{E}^*(U_k) = 1$ , où  $\mathbb{E}^*$  désigne l'espérance calculée pour la probabilité  $\mathbb{P}^*$ .

1. Déterminer  $p := \mathbb{P}^*(\{U_k = u\})$  et  $1 - p = \mathbb{P}^*(\{U_k = d\})$  en fonction de  $u$  et  $d$ .

Par définition, on veut  $1 = \mathbb{E}^*(U_k) = p u + (1-p)d = p(u-d) + d$   
 Il faut et il suffit donc de choisir  $p = \frac{1-d}{u-d}$  et donc  $1-p = \frac{u-d-1+d}{u-d} = \frac{u-1}{u-d}$

|                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| $p = \frac{1-d}{u-d}$ | $1-p = \frac{u-1}{u-d}$ |
|-----------------------|-------------------------|

2. On suppose que  $S_{k-1}$  est connu et vaut  $s$ ; montrer que<sup>2</sup>  $\mathbb{E}^*(sU_k) = s$ .

Comme  $\mathbb{E}^*$  est linéaire et que  $\mathbb{E}^*(U_k) = 1$  on a

$$\mathbb{E}^*(sU_k) = s \mathbb{E}^*(U_k) = s \cdot 1 = s \quad \text{C.Q.F.D.}$$

3. On appelle "contrat dérivé sur  $S_k$  de fonction de paiement  $\varphi$ " tout contrat payant  $C_k := \varphi(S_k)$  (à la date  $k$ , lorsque  $S_k$  sera connu). On appelle "portefeuille de couverture" de ce contrat la combinaison (à détenir si on veut "couvrir" ce contrat) de  $a$  actions et  $b$  euros telle que  $aS_k + b = \varphi(S_k)$ . Si  $S_{k-1} = s$ , déterminer la composition  $(a, b)$  à la date  $k-1$  d'un portefeuille de couverture, en fonction de  $c^+ := \varphi(su)$  et  $c^- := \varphi(sd)$ .

On sait que  $S_k = su$  ou  $S_k = sd$  et on veut que  $aS_k + b = \varphi(S_k)$  donc

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} asu + b = c^+ \\ asd + b = c^- \end{cases} & \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \begin{matrix} -d \\ u \end{matrix} \\ \hline as(u-d) + 0 = c^+ - c^- & \\ 0 + b(u-d) = uc^+ - dc^- & \Rightarrow b = \frac{uc^+ - dc^-}{u-d} \end{aligned}$$

$$a = \frac{c^+ - c^-}{s(u-d)}$$

|                                |                               |
|--------------------------------|-------------------------------|
| $a = \frac{c^+ - c^-}{s(u-d)}$ | $b = \frac{uc^+ - dc^-}{u-d}$ |
|--------------------------------|-------------------------------|

<sup>1</sup>nous verrons ultérieurement le sens de cette hypothèse sibylline

<sup>2</sup>au prochain chapitre nous verrons que le membre de gauche est, de fait, une espérance conditionnelle (lorsqu'on suppose les v.a.  $U_k$  indépendantes), se note  $\mathbb{E}^*(S_k \mid \{S_{k-1} = s\})$  et se lit "l'espérance de  $S_k$  sachant que  $S_{k-1}$  est égale à  $s$ ".

4. Calculer, en fonction de  $c^+$  et  $c^-$  le prix  $as + b =: c_{k-1}$  de ce portefeuille à la date  $k-1$ .

$$c_{k-1} = as + b = \frac{c^+ - c^-}{u-d} s + \frac{uc^- - dc^+}{u-d} = \frac{c^+(1-d) + C^-(u-1)}{u-d}$$

$$c_{k-1} = C^+ \frac{1-d}{u-d} + C^- \frac{u-1}{u-d}$$

5. Montrer que  $c_{k-1} = \mathbb{E}^*(\varphi(sU_k))$ .

$$\mathbb{E}^*(\varphi(sU_k)) = p\varphi(su) + (1-p)\varphi(sd) = \frac{1-d}{u-d} C^+ + \frac{u-1}{u-d} C^- = c_{k-1} \text{ d'après 4.}$$

**Exercice 2 (Loi de Poisson)** Soit  $\lambda > 0$ ; on dit qu'une v.a. suit une loi de Poisson si et seulement si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\mathbb{P}(\{X = k\}) = c \frac{\lambda^k}{k!}$  (avec  $0! := 1$ ). Nous verrons ultérieurement pourquoi la loi de Poisson est la loi des "événements rares".

1. Déterminer la valeur de la constante  $c$ .

Parque  $\mathbb{P}$  soit une probabilité il faut que  $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = k\})$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} c \frac{\lambda^k}{k!} = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = c e^{\lambda}$$

$$c = e^{-\lambda}$$

Il faut donc  $c = \frac{1}{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}$

2. Calculer  $\mathbb{E}(X)$ . **Indication :** utiliser que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

3. Soit  $Y := g(X)$ , avec  $g(x) := x(x-1)$ . Calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \lambda^2$$

De plus  $\lambda^2 = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2 - X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$

4. En déduire  $\text{Var}(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ . Donner ci-contre votre réponse

Nous venons de montrer que  $\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \lambda$

$$\text{Var}(X) =$$

$$\lambda$$

Donc  $\text{Var}(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$