

Date :
Université de Nice
Département de Mathématiques

NOM :

Prénom :

Groupe :
Année 2012-2013
Licence MASS 2e année

Fiche TD2
Probabilité, loi d'une v.a., et espérance

Exercice 1 (Loi de Poisson) Soit $\lambda > 0$; on dit qu'une v.a. suit une *loi de Poisson* si et seulement si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(\{X = k\}) = c \frac{\lambda^k}{k!}$ (avec $0! := 1$). Nous verrons ultérieurement pourquoi la loi de Poisson est la loi des "événements rares".

1. Déterminer la valeur de la constante c .

$c=$

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$. **Indication :** utiliser que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.

$\mathbb{E}(X)=$

3. Soit $Y := g(X)$, avec $g(x) := x(x-1)$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

$\mathbb{E}(Y)=$

4. En déduire $\text{Var}(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Indication : commencer par voir pourquoi $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

Donner ci-contre votre réponse $\text{Var}(X)=$

Exercice 2 (Loi exponentielle) Soit $\lambda > 0$; on dit qu'une v.a. X suit une *loi exponentielle* et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si et seulement si elle admet pour densité la fonction $f_X(x) := ce^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$.

1. Déterminer la valeur de la constante c .

$c=$

2. Calculer la valeur $F_X(x_0) := \mathbb{P}(\{X \leq x_0\})$ de la fonction de répartition de X au point x_0 ;

$F_X(x_0)=$

3. On dit que x_0 est la *médiane* de la v.a. X si et seulement si $\mathbb{P}\{X \leq x_0\} = \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}\{X \leq x_0\} = \mathbb{P}\{X \geq x_0\}$, voyez-vous pourquoi?). Calculer la médiane x_0 de X .

$x_0=$

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Indiquez d'abord l'expression que vous devez calculer.

$\mathbb{E}(X)=$

$=$

5. Soit $Y := g(X)$, avec $g(x) := x^2$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$. Indiquez d'abord l'expression que vous devez calculer.

$$\mathbb{E}(Y) =$$

6. En déduire $\text{Var}(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

$$\text{Var}(X) =$$

7. Calculer $F_Y(y_0) := \mathbb{P}(\{X^2 \leq y_0\})$; commencer par le cas $y_0 < 0$ puis traiter le cas $y_0 \geq 0$.

$$F_Y(y_0) =$$

8. En déduire $f_Y(y)$.

$$f_Y(y) =$$